Fonctions de deux variables

Topologie

Ouverts

Autocorrection A.
Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

(i) $\mathbb{R}^2$;

(ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

(iii) $]0,1[^2$;

(iv) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > \cos(x)\right\}$.

Autocorrection B.
Soit $p = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

Montrer que le *disque fermé* $\overline{D}(p,r) = \left\{z \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|z-p\| \leqslant r\right\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.

1. Soit I un ensemble quelconque et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^2$.
   Montrer que leur union $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $U \cap V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $U_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| < \frac{1}{n}\right\}$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble U_n est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, mais que leur intersection n'en est pas un.

Fonctions continues

Exercice 2$^+$.
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'une fonction continue $U \to \mathbb{R}$ ne peut pas être injective.

Exercice 3$^+$ (Continuité sous le signe somme).
Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

1. **Généralisation de deux théorèmes de continuité.** Soit S et T deux segments de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f est bornée sur $S \times T$ et atteint ses bornes.
   (b) Montrer que f est uniformément continue sur $S \times T$, c'est-à-dire que
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z_1, z_2 \in S \times T, \|z_1 - z_2\| \leqslant \delta \Rightarrow \|f(z_1) - f(z_2)\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$
2. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^1 f(x,t)\, dt$ est continue.

Dérivées partielles

Calcul

Autocorrection C.

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

(i) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \dfrac{x}{y} \end{cases}$;

(ii) $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \dfrac{1}{xy^2} \end{cases}$;

(iii) $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x \ln(xy) \end{cases}$;

(iv) $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto e^{-x} \sin\left(x^2 + y^2\right) \end{cases}$.

Autocorrection D.

Montrer que la norme $N : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ n'admet pas de dérivées partielles en $(0, 0)$, mais que sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est de classe C^1. Donner ses dérivées partielles.

Autocorrection E.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Montrer que la fonction $\theta : t \mapsto f(t^2, t^3)$ est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles.

Autocorrection F.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Montrer que les fonctions suivantes appartiennent à $C^1(\mathbb{R})$ ou $C^1(\mathbb{R}^2)$ suivant les cas, et calculer leur dérivée ou leurs dérivées partielles en fonction des dérivées partielles de f.

1. $u_1 : (x, y) \mapsto f(y, x)$;
2. $u_2 : x \mapsto f(x, x)$;
3. $u_3 : (x, y) \mapsto f(y, f(x, x))$;
4. $u_4 : x \mapsto f(x, f(x, x))$.

Exercice 4.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Montrer que la fonction $\varphi : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_x^y f$ est de classe C^1, et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 5.

On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f admet en tout point des dérivées selon tout vecteur, c'est-à-dire que, pour tout point $p \in \mathbb{R}^2$ et tout $v \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\varphi_v : t \mapsto f(t\,v)$ est dérivable en 0.
2. Montrer que la fonction f n'est pas continue en 0.

Exercice 6 (Équations de Cauchy-Riemann).

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On définit les deux fonctions :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \text{Ré}\left(P(x+iy)\right) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \text{Im}\left(P(x+iy)\right). \end{cases}$$

Montrer qu'elles vérifient *les équations de Cauchy-Riemann*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial g}{\partial x}(a,b).$$

Applications

Exercice 7.

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\nabla f = 0$. Montrer que f est constante.
2. Donner un exemple d'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de fonction $f \in C^1(U)$ non constante telle que $\nabla f = 0$.

Exercice 8.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement si $\exists h \in C^1(\mathbb{R}) : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = h(x)$.

Exercice 9 (Coordonnées polaires).

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. On définit :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & \left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right). \end{cases}$$

1. Calculer les dérivées partielles de g, que l'on notera $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$, en fonction de celles de f.
2. On dit que f est *radiale* si elle est constante sur tout cercle centré en 0. Montrer que cela se produit si et seulement si $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) - b\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$.

Exercice 10 (Opérateur d'Euler).

Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $k \in \mathbb{N}$. Une fonction $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ est dite *homogène de poids* k si

$$\forall x \in U, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(t\,x) = t^k f(x).$$

Montrer que cela se produit si et seulement si $\forall (a,b) \in U$, $a\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + b\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = k\,f(a,b)$.

Exercice 11.

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Montrer que f vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement s'il existe $h \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = h(2x+y)$.
2. Trouver toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ telles que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) - 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a$.

Exercice 12$^+$.

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^1 f(x,t)\,dt$ est de classe C^1, et que

$$\forall a \in \mathbb{R}, F'(a) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,dt.$$

2. **Intégrale de Gauss.** On définit $\gamma : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ et on veut déterminer la limite de γ en $+\infty$.

   On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt$.

   (a) Montrer que F est de classe C^1 et que $F' : x \mapsto -2\,\eta(x)\,\eta'(x)$.

   (b) En déduire que $F : x \mapsto \frac{\pi}{4} - \eta^2(x)$.

   (c) Conclure.

Extrema

Autocorrection G.

Déterminer les extrema (locaux et globaux) des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f_1 : (x,y) \mapsto \cos(x) + y^2$;
2. $f_2 : (x,y) \mapsto e^{3x}\,y^2 + e^x\,y$;
3. $f_3 : (x,y) \mapsto 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y$;
4. $f_4 : (x,y) \mapsto \exp(x\,\arctan(y))$.

Exercice 13.

On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto x\,e^y + y\,e^x. \end{cases}$

1. Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et déterminer ses points critiques.
2. Montrer que f n'a pas d'extremum local.

Exercice 14 (Fonction convexe).

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\forall p, q \in \mathbb{R}^2, \langle \nabla f(p) - \nabla f(q) | p - q \rangle \geqslant 0$.

Montrer que tout point critique de f en est un minimum.

Exercice 15$^+$.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto (y - x^2)(y - 2x^2). \end{cases}$

1. Montrer que $(0,0)$ est l'unique point critique de f, et que f n'admet pas en ce point de maximum local.
2. Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, la fonction $t \mapsto f(tv)$ admet un minimum local en 0.
3. En examinant le comportement de f le long d'une parabole bien choisie, montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

Mélange

Exercice 16^{++}.

Montrer qu'il existe un C^1-difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \to]-1,1[$, c'est-à-dire une bijection de classe C^1 dont la réciproque est encore de classe C^1.

Exercice 17^{++}.

1. Soit $*$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction de deux variables $f : (x,y) \mapsto x * y$ soit de classe C^1. On note e l'élément neutre de cette loi. Montrer que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \partial_2 f(x * y, e) = \partial_2 f(x,y)\, \partial_2 f(y,e).$$
2. En déduire que $\forall y \in \mathbb{R}, \partial_2 f(y,e) > 0$.
3. On cherche à construire $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall x, y, \varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Montrer que cette condition entraîne
$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = a \int_e^x \frac{dt}{\partial_2 f(t,e)}.$$
4. Réciproquement, montrer que pour chaque constante $a \neq 0$, la formule ci-dessus définit un C^1-difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est également un isomorphisme de groupes $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R},*)$.

En particulier, cela montre que $(G,*)$ est abélien.

5. Exhiber une loi de groupe non commutatif sur $\mathbb{R}^2$ tel que l'application de multiplication soit donnée par des fonctions usuelles (elle est donc de classe C^1, à ceci près que nous n'avons pas défini la notion – sans surprise – de fonction $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1).