Interrogation de calcul 18

Question 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left((n+1)^{3/2} - (n-1)^{3/2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- À quelle précision doit on calculer un développement asymptotique de cette suite pour obtenir un équivalent de $\left(\exp(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

- Calculer ce développement asymptotique et en déduire un équivalent simple de $\left(\exp(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Question 2. Soit $\mathcal{F} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:=u}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=:w} \right)$, une famille de vecteurs de $\mathbb{C}^3$.

Déterminer si $\mathcal{F}$ est libre. Si elle ne l'est pas, on exhibera une relation de liaison non triviale.

Question 3. Même question avec $\mathcal{G} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix}}_{:=u}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ j \end{pmatrix}}_{=:v}, \underbrace{\begin{pmatrix} j \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:w} \right)$, où $j = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$.

Question 4. On considère $Q = X^3 + X^2 + X + 1$ et la famille $\mathcal{F} = \left(Q''', Q'', Q', Q\right)$ dans $K_3[X]$. On note par ailleurs $\mathcal{B}_c = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canonique de cet espace vectoriel.

- Calculer explicitement les éléments de $\mathcal{F}$.

- Justifier que $\mathcal{F}$ est une base de $K_3[X]$.

- Soit $P = 3X^2 - X + 1$. Calculer les coordonnées ${}_{\mathcal{B}_c}[P]$.

- Calculer les coordonnées ${}_{\mathcal{F}}[P]$.