Troisième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci $\boxed{\text{d'encadrer}}$ ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice.

1. Soit $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i - a_j)^2$ en fonction de $\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$.
2. Soit $x_1, \ldots, x_n \in [2, +\infty[$. Montrer $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geqslant \frac{1}{2n^2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\ln x_i - \ln x_j\right)^2$.

   Indication. *On pourra s'intéresser à la fonction* $\varphi : x \mapsto e^x - x^2$.

Problème A. Encadrement de Shafer-Fink (1995).

Dans ce problème, on montre l'encadrement de Shafer-Fink :

$$\forall x \in [0, 1]\,, \frac{3x}{2 + \sqrt{1 - x^2}} \leqslant \arcsin(x) \leqslant \frac{\pi x}{2 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

Partie I. Un lemme, une fonction.

On introduit la fonction $f : \begin{cases} \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \dfrac{(\pi - 2\theta)(2 + \sin\theta)}{\cos\theta}. \end{cases}$

Dans cette partie, on **admet** le résultat suivant. La partie suivante est consacrée à sa démonstration.

Lemme. La fonction f décroît strictement.

1. (a) En utilisant les propriétés multiplicatives des équivalents, obtenir un équivalent de la fonction $h \mapsto f\left(\frac{\pi}{2} - h\right)$ quand $h \to 0$.
   (b) En déduire que $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, 6 < f(\theta) \leqslant 2\pi$.
   (c) Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Transformer l'encadrement précédent en un encadrement de $\frac{\pi}{2} - \theta$.
2. (a) Montrer $\forall x \in [-1, 1]\,, \frac{\pi}{2} - \arccos(x) = \arcsin(x)$.
   (b) Déduire de ce qui précède une démonstration de l'encadrement de Shafer-Fink.

Partie II. Démonstration du lemme.

On introduit deux fonctions $g, h : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ par les formules

$$g : \theta \mapsto (\pi - 2\theta)(1 + 2\sin\theta) - 2(2 + \sin\theta)\cos\theta \qquad \text{et} \qquad h : \theta \mapsto \pi - 2\theta - 2\cos\theta.$$

3. (a) Montrer que $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, h(\theta) > 0$.
   (b) En déduire $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, g(\theta) < 0$.
4. (a) Soit $u, v, w : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ trois fonctions dérivables telles que w ne s'annule jamais.

   Montrer que la fonction $\frac{uv}{w}$ est dérivable, et que sa dérivée est du même signe (au sens strict : < 0, $= 0$ ou > 0) que $u'vw + uv'w - uvw'$.
   (b) En déduire la décroissance stricte de f, ce qui conclut la démonstration.

Problème B. Inégalités de Kusmin-Landau (1928).

Partie I. La fonction cotangente.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction cot : $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
2. Montrer $\forall x \in D, \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$ et tracer le graphe de cot.
3. Pour $x \in D$, calculer $\cot(\pi - x)$ et interpréter (sans chercher à trop justifier) cette formule sur le graphe obtenu à la question précédente.
4. Soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Exprimer $\dfrac{1+\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$ en fonction de $\cot(\alpha)$.
   (b) En déduire $0 < \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$.
5. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.
   (a) Montrer que $\left|\dfrac{1}{1-e^{it}}\right| = \dfrac{1}{2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}$ et trouver deux constantes complexes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ telles que $\dfrac{1}{1-e^{it}} = \alpha + \beta \cot\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
   (b) Vérifier que $\left|\dfrac{1}{1-e^{it}}\right| = \left|1 - \dfrac{1}{1-e^{it}}\right|$ et interpréter géométriquement cette égalité.

Partie II. Inégalité discrète.

On fixe $\theta \in]0, \pi[$ et $n \geqslant 2$ et on considère une liste finie $(x_k)_{k=1}^{n}$ de nombres réels tels que

$$\theta \leqslant x_2 - x_1 \leqslant x_3 - x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n - x_{n-1} \leqslant 2\pi - \theta.$$

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on définit par ailleurs

- $y_k = x_{k+1} - x_k$ (si bien que $\theta \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_{n-1} \leqslant 2\pi - \theta$) ;
- $c_k = \dfrac{1}{1-e^{iy_k}}$ (qui est bien défini : on ne demande pas de le justifier).

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

   Les sous-questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres, mais elles peuvent faire appel aux résultats de la partie précédente.

   (a) Montrer que $c_{k+1} - c_k$ est imaginaire pur, et déterminer le signe de sa partie imaginaire.
   (b) Montrer $|c_k| \leqslant \dfrac{1}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.
   (c) Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, exprimer $e^{ix_k} - e^{ix_{k+1}}$ en fonction de c_k et e^{ix_k}.
7. (a) Déduire de la question 6c une égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ix_k} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(e^{ix_k} - e^{ix_{k+1}}\right) +$ **?**, où le point d'interrogation doit être remplacé par la bonne valeur.
   (b) Montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ix_k} = c_1\, e^{ix_1} + \sum_{k=2}^{n-1} (c_k - c_{k-1})\, e^{ix_k} + (1 - c_{n-1}) e^{ix_n}$.
8. En déduire $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ix_k}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \cot\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
9. Montrer l'inégalité discrète de Kusmin-Landau : $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ix_k}\right| \leqslant \cot\left(\dfrac{\theta}{4}\right) \leqslant \dfrac{4}{\theta}$.

Partie III. Inégalité continue.

Soit $\varphi \in C^1([1,n])$ convexe et $\lambda \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

Les deux dernières questions du problème montrent (sous des hypothèses différentes) l'inégalité continue de Kusmin-Landau :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\,2\pi\,\varphi(k)}\right| \leqslant \frac{2}{\pi\lambda}. \tag{KL}$$

10. On suppose $\forall x \in [1,n], \lambda \leqslant \varphi'(x) \leqslant 1-\lambda$.
    (a) Montrer $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \lambda \leqslant \varphi(k+1) - \varphi(k) \leqslant 1-\lambda$.
    (b) En déduire (KL).
11. Plus généralement, montrer l'inégalité en supposant $\forall x \in [1,n]\,, \forall m \in \mathbb{Z}, \left|\varphi'(x) - m\right| \geqslant \lambda$.