Sixième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1. Dénombrement de marches.

Dans cet exercice, on va imaginer un individu « marchant » dans $\mathbb{Z}$. Le point de départ est en 0 et, à chaque instant, l'individu fait un pas « $+1$ » (c'est-à-dire qu'il se déplace vers l'entier immédiatement supérieur) ou « -1 » (c'est-à-dire qu'il se déplace vers l'entier immédiatement inférieur).

Plus précisément, on pourra représenter une *marche de longueur* $\ell \geqslant 1$ de diverses façons.

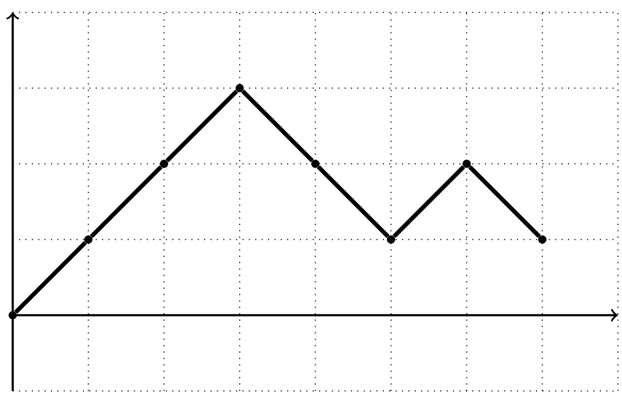
- On pourra donner une liste* $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\ell]$ des *pas* de la marche, valant tous 1 ou -1.
  Par exemple, $[1, 1, 1, -1, -1, 1, -1]$ décrit une certaine marche de longueur 7.
- On pourra préférer donner la liste $(s_0, s_1, \dots, s_\ell)$ des *positions* occupées successivement par le marcheur, commençant impérativement par la position initiale $s_0 = 0$:

$$s_0 = 0, \qquad s_1 = \varepsilon_1, \qquad s_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \qquad s_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \qquad \dots \qquad s_\ell = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_\ell.$$

  Par exemple, la même marche de longueur 7 peut être décrite par la liste des positions†

$$\left(0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{-1} 2 \xrightarrow{-1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{-1} 1\right).$$

- Enfin, on pourra représenter la liste des positions par son graphe, le temps étant indiqué en abscisse et la position dans $\mathbb{Z}$ représentée en ordonnée. La même marche correspond alors au graphe suivant :



La marche donnée par les pas $[1, 1, 1, -1, -1, 1, -1]$ ou par les positions $(0, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1)$.

Dans tout l'exercice, on fixe un entier $n \geqslant 3$.

1. Combien y a-t-il au total de marches de longueur $2n$?

   Il y a autant de marches de longueur $2n$ que de mots de longueur $2n$ sur l'alphabet $\{-1, +1\}$. Comme l'alphabet a deux lettres, il y en a donc 2^{2n}.

2. Combien y a-t-il de marches de longueur $2n$ dont toutes les positions appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$?

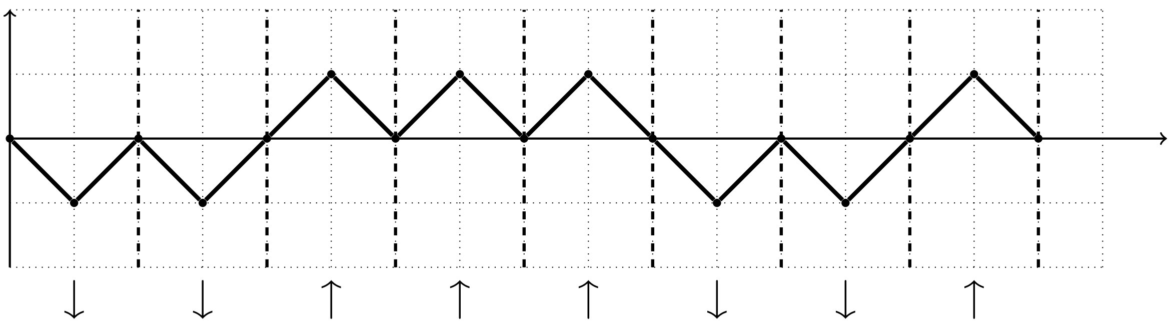
   Comme suggérée par la note de bas de page cryptique, on remarque immédiatement (et on démontre par récurrence) que, dans une liste de positions, l'entier s_k est toujours de la même parité que k.

*. Pour éviter toute confusion, je vais noter la liste des pas avec des crochets, mais cela ne fait pas de différence mathématique.

†. On pourra passer quelques secondes à méditer sur la parité de ces huit entiers...

Une marche de longueur $2n$ dont les positions appartiennent à $\{-1,0,1\}$ revient donc toujours en 0 en tout temps pair, et vaut -1 ou 1 aux temps pairs.

La suite des pas d'une telle marche se décomposera donc en motifs de longueur 2 tous égaux à $[1,-1]$ (ce que l'on encodera par le symbole $\upharpoonleft$) ou $[-1,1]$ (ce que l'on encodera par $\downharpoonleft$).



Une marche dont les positions restent dans $\{-1,0,1\}$.

Par cette analyse, une marche vérifiant la contrainte de l'énoncé correspond parfaitement (c'est-à-dire que chaque marche correspond à un mot, et réciproquement) à un mot de longueur n sur l'alphabet $\{\upharpoonleft,\downharpoonleft\}$. Il y a donc 2^n telles marches.

***Remarque.** Ce n'est pas du tout la seule façon de rédiger ce raisonnement : on peut aussi oublier les termes de rang pair dans la liste des positions : le n-uplet $(s_1,s_3,\ldots,s_{2n-1})$ est un n-uplet quelconque de $\{-1,1\}^n$ qui permet de reconstruire entièrement la marche, donc, là encore, il y a 2^n marches vérifiant la contrainte de l'énoncé, par le principe de bijection.*

3. Combien y a-t-il de marches de longueur $2n$ dont la dernière position s_{2n} est 0 ?

   Pour construire une telle marche, il faut qu'il y ait exactement autant de pas $+1$ que de pas -1 dans la suite des pas.

   Autrement dit, la suite des pas doit être une anagramme de $[\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\text{ fois}},\underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{n\text{ fois}}]$.

   D'après le cours, il y a $\dbinom{2n}{n}$ telles marches.

4. (a) Combien y a-t-il de marches de longueur n dont l'une au moins des positions est n ? (On dira que la valeur n est *atteinte* par la marche).

   Déjà, la marche ne progressant que d'une unité par temps, elle ne peut atteindre la position n qu'au bout de n temps, c'est-à-dire à la toute fin.

   En outre, si au moins un pas vaut -1, la position finale est $\leqslant (n-1)\times(+1)+1\times(-1)=n-2$ et la marche n'atteint pas n.

   Ainsi, la seule marche atteignant n est $[1,1,\ldots,1]$. Il y a donc une seule telle marche.

   (b) Combien y a-t-il de marches de longueur n atteignant la valeur $n-1$?

   Comme la marche ne peut progresser que d'une unité par temps, elle ne peut atteindre la valeur $n-1$ qu'au temps $n-1$ ou au temps n, mais cette dernière possibilité est anéantie par les questions de parité.

   En réutilisant l'argument de la question précédente, on voit que la suite des pas d'une marche atteignant $n-1$ est nécessairement de la forme $[\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1\text{ fois}},?]$.

   Comme elles conviennent clairement, on voit qu'il y a deux marches vérifiant la contrainte.

(c) Combien y a-t-il de marches de longueur n atteignant la valeur $n-2$?

Toujours par l'argument de parité, une marche de longueur n *ne peut atteindre* $n-2$ *qu'aux temps* $n-2$ *et* n.

- *Une marche atteignant la valeur* $n-2$ *au temps* $n-2$ *est, toujours par le même argument, une marche dont la suite des pas est de la forme* $[\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-2\ \textit{fois}},?,?]$.

  Il y a donc exactement 4 *telles marches.*
- *Une marche atteignant la valeur* $n-2$ *au temps* n *est une marche possédant exactement un pas valant* -1*, c'est-à-dire une marche dont la suite des pas est une anagramme de* $[\underbrace{1,1,\dots,1,1}_{n-1\ \textit{fois}},-1]$.

  Il y a donc $\binom{n}{1} = n$ *telles marches.*
- *Mais on ne peut pas appliquer le principe d'addition ! En effet, il y a deux marches qui appartiennent aux deux catégories précédentes, à savoir* $[\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-2\ \textit{fois}},1,-1]$ *et* $[\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-2\ \textit{fois}},-1,1]$.

En utilisant la formule $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$*, on obtient que le nombre de marches atteignant* $n-2$ *est* $4+n-2 = n+2$.

5. (a) Combien y a-t-il de marches de longueur $5n$ dont la n-ième position s_n est n et la dernière position s_{5n} est $-n$?

Par l'argument vu, revu et rerevu dans les questions précédentes, une telle marche commence nécessairement par n *pas positifs, pour atteindre* n *le plus tôt possible, c'est-à-dire au temps* n.

(C'est surtout une manière, pour le concepteur du sujet, de contourner la contrainte que la marche commence en 0 *: après l'introduction convenue* $[\underbrace{1,\dots,1}_{n\ \textit{fois}}]$*, on se ramène à des marches de longueur* $4n$ *commençant en* n*.)*

Ensuite, les $4n$ *derniers pas de la marche doivent contenir exactement* n *pas* $+1$ *et* $3n$ *pas* -1 *pour que la « dérive » globale soit de* $-2n$ *entre les temps* n *et* $4n$.

On se ramène donc aux dénombrements des anagrammes de $[\underbrace{1,\dots,1}_{n\ \textit{fois}},\underbrace{-1,-1,-1,\dots,-1,-1,-1}_{3n\ \textit{fois}}]$*, et il y a* $\binom{4n}{n}$ *marches satisfaisant à la contrainte de l'énoncé.*

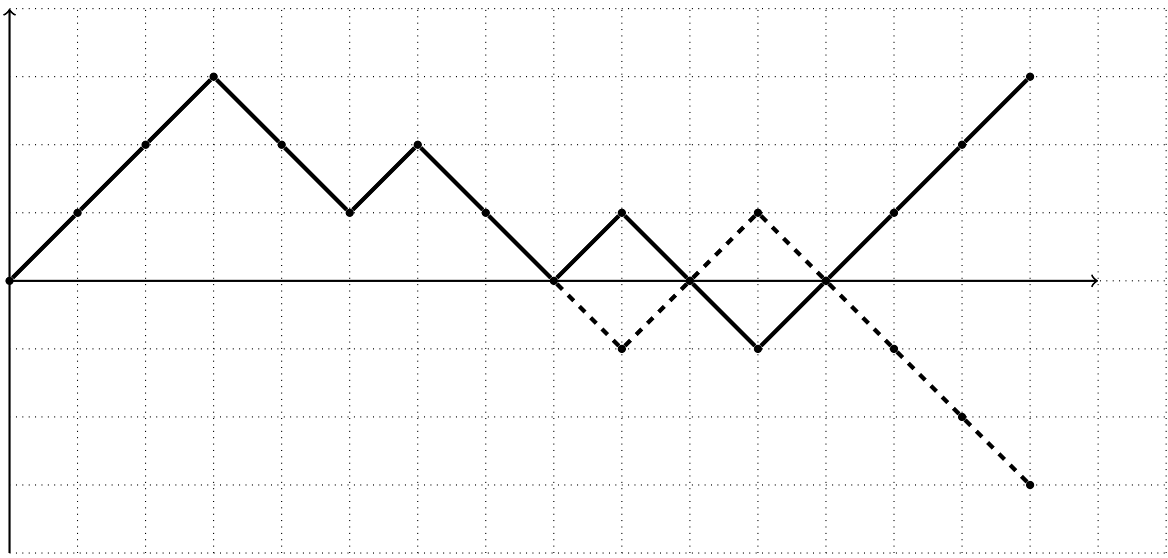
(b)$^+$ Combien y a-t-il de marches de longueur $5n$ dont la n-ième position s_n et la dernière position s_{5n} sont n, et dont l'une des positions intermédiaires s_k (pour $k \in [\![n, 5n]\!]$) est 0 ?

Nous allons voir qu'il est possible de ramener cette question à la précédente au moyen d'une bijection, ce qui fait que la réponse est ici encore $\binom{4n}{n}$.

Étant donné une marche comme dans l'énoncé, il existe un premier temps $k \geqslant 1$ *lors duquel la marche repasse par* 0.

On associe alors à une telle marche une nouvelle marche en inversant, à partir de ce moment, les pas 1 *et* -1*. Autrement dit, on effectue une réflexion du graphe de la marche, à partir du temps* k*, par rapport à l'axe des abscisses.*

Cette marche « réfléchie » passe par n *au temps* n*, puis elle va de* n *à* $-n$ *(en passant par* 0*, mais c'est maintenant une conséquence des positions de départ et d'arrivée). Autrement dit, il s'agit d'une des marches que nous avons comptées à la question précédente.*



Une marche passant par 0 et sa « réflexion ».

$$(0,1,2,3,2,1,2,1,\underline{\mathbf{0}},1,0,-1,0,1,2,3) \rightsquigarrow (0,1,2,3,2,1,2,1,\underline{\mathbf{0}},-1,0,1,0,-1,-2,-3)$$
$$[1,1,1,-1,-1,1,-1,-1 \parallel 1,-1,-1,1,1,1,1] \rightsquigarrow [1,1,1,-1,-1,1,-1,-1 \parallel -1,1,1,-1,-1,-1,-1].$$

(Dans une description comme dans l'autre, on a marqué le moment du « premier retour en 0 ».)

On vérifie alors que cette opération met en bijection les marches comptées par les deux dernières questions. (L'opération inverse est essentiellement décrite par les mêmes mots : on réfléchit la trajectoire de la marche à partir de son premier retour en 0).

Remarque. *Cette idée géniale est connue en combinatoire sous le nom de* principe de réflexion.*Elle admet de nombreuses variantes.*

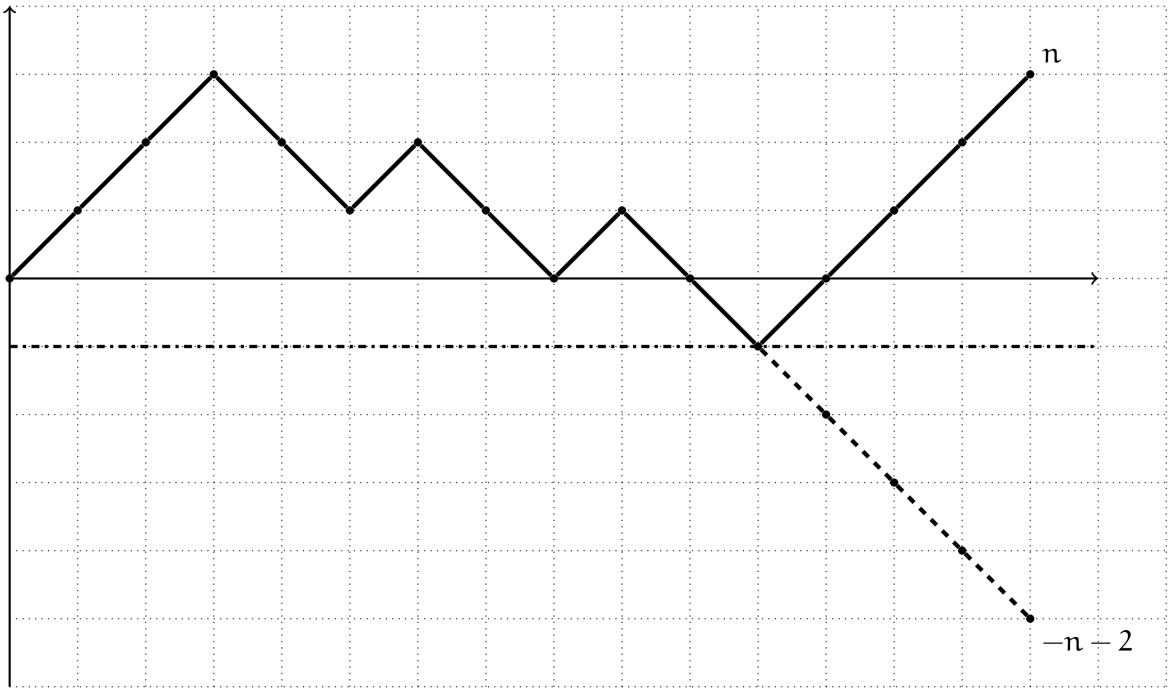
(c)$^{++}$ Combien y a-t-il de marches de longueur $5n$ dont la n-ième position s_n et la dernière position s_{5n} sont n, et dont toutes les positions sont $\geqslant 0$?

On va utiliser à la fois le principe de soustraction et le principe de réflexion *rencontré à la question précédente.*

- *Les marches passant par n au temps n puis allant de n à n sont obtenues en concaténant la liste de pas* $[\underbrace{1,\ldots,1}_{n \textit{ fois}}]$ *et une anagramme de* $[\underbrace{1,\ldots,1}_{2n \textit{ fois}},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{2n \textit{ fois}}]$.

  Il y en a donc $\dbinom{4n}{2n}$.
- *Pour une telle marche, « ne pas être tout le temps $\geqslant 0$ » et « passer par -1 » sont synonymes.*

  Mais le même argument de réflexion (par rapport au premier temps où la marche atteint -1) montre qu'il y a autant de marches allant de n (au temps n) à n (au temps $5n$) en passant par la position -1 que de marches allant de n à $-n-2$.



Réflexion à partir du « temps d'atteinte » de -1.

Ces marches sont obtenues en concaténant la liste de pas $[\underbrace{1,\ldots,1}_{n \textit{ fois}}]$ *et une anagramme de* $[\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1 \textit{ fois}},\underbrace{-1,-1,-1,\ldots,-1,-1,-1}_{3n+1 \textit{ fois}}]$ *(ce qui rend bien compte d'une « dérive » de* $2n+2$ *unités, pour passer de la position* n *à la position* $-n-2$*).*

D'après le principe de soustraction, le nombre de telles marches est $\dbinom{4n}{2n} - \dbinom{4n}{n-1}$.

Exercice 2. Des suites récurrentes.

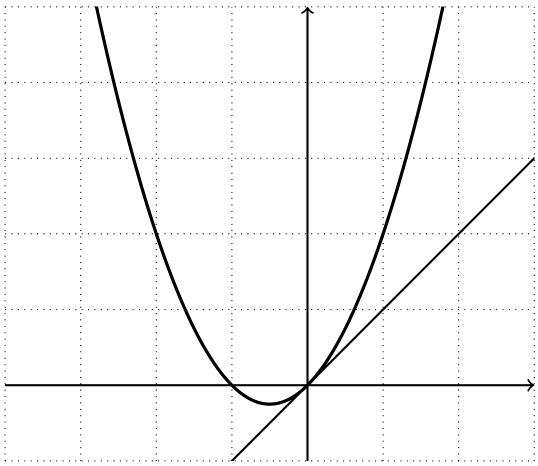
On introduit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto x + x^2 \end{cases}$ et on va étudier les suites récurrentes dont l'itératrice est f.

Toutes les suites notées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'énoncé vérifieront donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Étudier la fonction f et en dresser rapidement un graphe et un tableau de variations.

   Notre connaissance des polynômes du second degré nous permet rapidement d'obtenir les informations demandées. On note $g : x \mapsto f(x) - x = x^2$.

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		0		$+\infty$
f'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↘	$-1/4$	↗	0	↗	$+\infty$
g		$+$		$+$		$+$	0	$+$	



   Profitons-en pour remarquer que le tableau de signe de g *(ou l'expression de la suite, directement) montre que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$. *Toutes les suites définies par la relation de récurrence de* u *seront donc croissantes.*

2. On suppose $u_0 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   On observe que le segment $I = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ *est stable sous* f, *car* $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \geqslant -\frac{1}{2}$, *qu'il contient* u_0. *Par une récurrence directe, la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc à valeurs dans* I. *En particulier, elle est bornée.*

   Comme on a remarqué dès le début que la suite croissait, le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle converge : on peut ainsi trouver $\ell \in I$ *tel que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

   Par continuité de f, *on a* $u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. *Mais* $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *est aussi une suite extraite de* u, *donc elle doit converger vers* ℓ. *Par unicité de la limite, on a* $f(\ell) = \ell$ *donc* $\ell = 0$, *car c'est l'unique point fixe de* f *sur* $\mathbb{R}$.

   In fine, *on a montré* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $u_0 \in [0, +\infty[$.

   - *Le point* 0 *est fixe. Si* $u_0 = 0$, *la suite* u *est donc constante, si bien que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   - *Si* $u_0 > 0$, *la croissance de* u *et le théorème de la limite monotone montrent que* u *possède une limite* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Comme* $u_0 > 0$, *on a même* $\ell \geqslant u_0 > 0$.

     Si la limite ℓ *était finie, on aurait* $f(\ell) = \ell$ *puis* $\ell = 0$ *en recopiant les arguments de la question précédente, ce qui est exclu. Ainsi,* $\ell = +\infty$.

     Dans ce cas, on a donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

4. Que se passe-t-il dans les cas $u_0 \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ et $u_0 \in]-\infty, -1]$?

▶ *Le tableau de variations montre que si* $u_0 \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$*, alors* $u_1 = f(u_0) \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right] \subseteq \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est récurrente, d'itératrice* f*, et de premier terme* $u_1 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

D'après la première question précédente, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

▶ *Si* $u_0 = -1$*, alors* $u_1 = 0$ *et la suite stationne à* 0.

▶ *Enfin, si* $u_0 < -1$*, on a* $u_1 > 0$ *et les mêmes arguments que dans le premier cas montrent que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

5. On suppose dans cette question $u_0 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right[$.

En introduisant une suite auxiliaire de la forme $\left(u_n^\alpha\right)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La méditation heuristique vue en cours indique que si l'on souhaite montrer $u_n \approx \mathrm{Cte}\, n^\beta$*, la relation* $\mathrm{Cte}\, n^{\beta-1} \approx u_{n+1} - u_n = u_n^2 \approx \mathrm{Cte}\, n^{2\beta}$ *pousse à conjecturer* $\beta - 1 = 2\beta$*, c'est-à-dire* $\beta = -1$*. (Notons qu'ici,* Cte *désigne une constante non précisée, qui varie d'une apparition à l'autre : au niveau de rigueur où l'on se trouve, on n'a pas de temps à perdre avec les constantes...)*

Il est donc raisonnable de conjecturer $u_n \approx \mathrm{Cte}\, n^{-1}$ *(*whatever it means *: le symbole* $\approx$ *a vocation à rester imprécis) et l'on pose donc* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_n^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$*. Notons que l'intervalle* $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$ *étant stable sous* f*, la suite* u *est à valeurs dans cet intervalle ouvert et, notamment ne s'annule jamais.*

On exploite alors la relation pour obtenir une « relation de récurrence asymptotique » sur la suite v *:*

$$\begin{aligned}
v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} &= \frac{1}{u_n + u_n^2} \\
&= \frac{1}{u_n}(1+u_n)^{-1} \\
&= \frac{1}{u_n}(1 - u_n + o(u_n)) && \textit{(car } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \textit{ et } (1+h)^{-1} = 1 - h + o(h)\textit{)} \\
&= \frac{1}{u_n} - 1 + o(1) = v_n - 1 + o(1).
\end{aligned}$$

Autrement dit, $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$*. Le lemme de l'escalier permet d'en déduire* $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$.

Par les propriétés multiplicatives de l'équivalent, $u_n = v_n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$.

6. Dans cette dernière question, on suppose $u_0 > 1$ et on cherche là encore à obtenir un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Déterminer l'expression de la suite récurrente $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $w_0 = \ln(u_0)$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 2w_n + 1$.

   C'est une suite arithmético-géométrique. Le point fixe de l'itératrice affine $x \mapsto 2x + 1$ *étant* -1*, on obtient que* $\left(w_n + 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison 2, d'où*

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2^n\big(w_0 + 1\big) - 1 = 2^n\big(\ln(u_0) + 1\big) - 1.$$

(b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \leqslant w_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a (en utilisant notamment l'inégalité de concavité du logarithme) :

$$\ln\big(u_{n+1}\big) = \ln(u_n^2 + u_n) = \ln(u_n^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leqslant 2\ln(u_n) + \frac{1}{u_n}.$$

Comme la suite u croît manifestement et que $u_0 \geqslant 1$, on a $u_n \geqslant 1$, ce qui permet d'affaiblir encore un peu l'inégalité pour en déduire $\ln\big(u_{n+1}\big) \leqslant 2\ln(u_n) + 1$.

À partir de cette inégalité, une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \leqslant w_n$.

(c) Montrer que la suite $\left(\dfrac{\ln(u_n)}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

- *Cette suite est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1}) &= \ln(u_n + u_n^2) \\ &\geqslant \ln(u_n^2) = 2\ln(u_n) \qquad \textit{(croissance du logarithme)} \\ \textit{donc} \quad \frac{\ln(u_{n+1})}{2^{n+1}} &\geqslant \frac{2\ln(u_n)}{2^{n+1}} = \frac{\ln(u_n)}{2^n}. \end{aligned}$$

- *Par ailleurs, les deux questions précédentes montrent que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{\ln(u_n)}{2^n} \leqslant \frac{w_n}{2^n} \leqslant \frac{2^n\big(\ln(u_0)+1\big)-1}{2^n} \leqslant \ln(u_0) + 1,$$

  donc la suite de l'énoncé est également majorée.

Le théorème de la limite monotone conclut alors.

(d) En notant α la limite de la suite précédente, montrer $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \alpha - \dfrac{\ln(u_n)}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n\,u_n}$.

C'est sans doute la question la plus difficile de l'exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$.

L'inégalité de gauche est immédiate, par croissance de la suite $\left(\dfrac{\ln(u_n)}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: le théorème de la limite monotone garantit que la limite d'une suite croissante est supérieure à ses valeurs.

Soit $m \geqslant n$ un entier auxiliaire (qui aura vocation à tendre vers l'infini plus tard). On part de l'inégalité $\forall k \in \mathbb{N}, \ln(u_{k+1}) \leqslant 2\ln(u_k) + \dfrac{1}{u_k}$ démontrée et utilisée plus haut. Après division de part et d'autre et réarrangement, on a $\forall k \in \mathbb{N}, \dfrac{\ln(u_{k+1})}{2^{k+1}} - \dfrac{\ln(u_k)}{2^k} \leqslant \dfrac{1}{2^{k+1}\,u_k}$.

En sommant ces inégalités pour k allant de n à $m-1$ et en utilisant la croissance de u, on obtient

$$\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{\ln(u_{k+1})}{2^{k+1}} - \frac{\ln(u_k)}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2^{k+1}\,u_k} \leqslant \frac{1}{u_n}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2^{k+1}}.$$

La somme de gauche se télescope, et la somme de droite, géométrique, se calcule et se majore :

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\dfrac{1}{2^{n+1}} - \dfrac{1}{2^{m+1}}}{1-\dfrac{1}{2}} \leqslant 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

On a donc montré, pour tout $m \geqslant 1$ *:*

$$\frac{\ln(u_m)}{2^m} - \frac{\ln(u_n)}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n\, u_n}.$$

Quand m *varie, la quantité de gauche converge vers* $\alpha - \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$ *et celle de droite est constante. Par passage à la limite dans les inégalités larges, on en déduit* $\alpha - \dfrac{\ln(u_n)}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n\, u_n}$.

(e) En déduire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(\alpha\, 2^n\right)$.

Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$*, l'encadrement précédent montre*

$$\frac{\ln(u_n)}{2^n} = \alpha + O\left(\frac{1}{2^n\, u_n}\right) = \alpha + o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

On en déduit

$$\ln(u_n) = \alpha\, 2^n + o(1) \qquad \textit{donc} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(\alpha\, 2^n\right),$$

puisque l'exponentielle transforme les approximations $\cdots = \cdots + o(1)$ *en équivalents.*

Problème. Autour du théorème de (Cauchy-)Cesàro.

Pour fixer les notations, on rappelle une forme du théorème de Cesàro [‡].

Théorème.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ une suite complexe indexée par $\mathbb{N}^*$.

S'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Dans toute la suite du problème, étant donné une suite (réelle ou complexe) $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on dira que u *converge au sens de Cesàro* (en abrégé : *C-converge*) si la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Cette limite sera appelée la *limite au sens de Cesàro* (en abrégé : la *C-limite*) de la suite u.

Partie I. Généralités.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   (a) En utilisant une fonction convexe, montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$,

   $$\frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

   La fonction $i : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ *est dérivable, et sa dérivée* $i' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ *est croissante, ce qui montre la convexité de* i.

   Soit $n \geqslant 1$ *et* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. *D'après l'inégalité de Jensen,*

   $$i\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \leqslant \frac{i(a_1) + \cdots + i(a_n)}{n} \qquad \textit{donc} \qquad \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

   (b) En déduire $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   Soit $n \geqslant 1$. *En appliquant la question précédente aux nombres strictement positifs* $u_1, \dots, u_n > 0$, *on obtient*

   $$0 \leqslant \left(\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}\right)^{-1} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

   D'après le théorème de Cesàro, appliqué à la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *qui converge vers* 0, *le membre de droite de cet encadrement tend vers* 0.

   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\displaystyle\left(\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}\right)^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Comme la suite $\displaystyle\left(\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est à valeurs strictements positives, on en déduit*

   $$\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

‡. Qui n'est pas tout à fait celle du cours, mais la démonstration du cours s'adapte sans aucun problème.

2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle monotone.

   Montrer que si u converge au sens de Cesàro, alors elle converge.

   On procède par contraposée. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

   D'après le théorème de la limite monotone, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   On ne peut malheureusement pas appliquer directement la question précédente car u n'est pas nécessairement à valeurs strictement positives. En revanche, comme elle diverge vers $+\infty$, elle est > 0 à partir d'un certain rang : on peut trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N, u_n > 0$.

   Définissons une nouvelle suite u^+ en décrétant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^+ = \begin{cases} u_n & \textit{si } n \geqslant N \\ 1 & \textit{sinon.} \end{cases}$

   Cette nouvelle suite est à valeurs positives et vérifie $u_n^+ \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par le caractère asymptotique de la limite. (En revanche, elle n'est plus nécessairement croissante, mais peu nous chaut.)

   La question précédente montre donc que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^+ \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   Or, pour tout $n \geqslant N$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k^+ + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}(u_k - 1).$$

   La quantité $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(u_k-1)$ étant fixée, on a $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(u_k-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par opérations.

3. Quelles sont les suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$?

   Analyse. *Soit u une telle suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\begin{aligned} u_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \qquad & \textit{donc} \qquad u_1 + \cdots + u_n = n\,u_n \\ u_{n+1} = \frac{u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}}{n+1} \qquad & \textit{donc} \qquad u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} = (n+1)\,u_{n+1}. \\ & \textit{donc} \qquad u_1 + \cdots + u_n = n\,u_{n+1}. \end{aligned}$$

   Ainsi, $n\,u_{n+1} = n\,u_n$, d'où $u_{n+1} = u_n$ (car $n \neq 0$).

   On a donc montré $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n$, ce qui montre que la suite u est constante.

   Synthèse. *Réciproquement, une suite constante est manifestement égale à la suite de ses moyennes de Cesàro.*

   In fine, *les suites vérifiant la condition de l'énoncé sont exactement les suites constantes.*

4. **Conséquences asymptotiques de la convergence (au sens de Cesàro).**

   (a) Montrer que si une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors elle est bornée.

   Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons $\ell \in \mathbb{C}$ sa limite.

   On pourrait appliquer la propriété de l'énoncé aux suites réelles $\big(\mathrm{Ré}\, u_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(\mathrm{Im}\, u_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mais on va plutôt répéter la démonstration du cours.

En appliquant la définition de la convergence à $\varepsilon = 1$, on peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant 1$. On en déduit $\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant 1 + |\ell|$ par l'inégalité triangulaire, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leqslant \max(|u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|)$$

au prix d'une petite disjonction de cas.

(b) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge au sens de Cesàro, alors $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge au sens de Cesàro et notons ℓ sa limite au sens de Cesàro.

On peut alors écrire, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} u_n &= n\,\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} - (n-1)\frac{u_1 + \cdots + u_{n-1}}{n-1} \\ &= \left[n\left(\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} - \ell\right) + n\ell\right] - \left[(n-1)\left(\frac{u_1 + \cdots + u_{n-1}}{n-1} - \ell\right) + (n-1)\ell\right] \\ &= \ell + n\left(\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} - \ell\right) - (n-1)\left(\frac{u_1 + \cdots + u_{n-1}}{n-1} - \ell\right). \end{aligned}$$

Par définition de la convergence au sens de Cesàro, chacune des suites dans les deux parenthèses tend vers 0. Comme $n - 1 = O(n)$, il s'ensuit que les deux derniers termes de la somme sont tous les deux $o(n)$.

Comme, évidemment, $\ell = O(1) = o(n)$, il vient $u_n = o(n)$.

Remarque. *Cette démonstration paraitra moins parachutée si on la mène en deux temps : d'abord en supposant que la limite au sens de Cesàro de u est 0, puis en appliquant le premier point à la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

(c)$^+$ Soit $\alpha \in \,]0, 1[$.

Construire une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente au sens de Cesàro telle que $v_n \neq \underset{n\to+\infty}{o}(n^\alpha)$.

Une idée qui marche est de partir de la suite $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ elle-même (qui n'est certainement pas négligeable devant elle-même) et de la « raréfier » en tuant la plupart des termes : les termes restant suffiront à garder la condition $u_n \neq o(n^\alpha)$ (puisque la suite des quotients vaudra de temps en temps 1 (à vrai dire assez rarement, mais il suffit que cela ait lieu une infinité de fois). En revanche, si l'opération de raréfaction est suffisamment radicale, on peut obtenir que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles soit $o(n)$, c'est-à-dire que la suite u converge vers 0 au sens de Cesàro.

Passons à la construction proprement dite. On note $P = \left\{2^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ l'ensemble des puissances de 2. Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on voit que $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$, où $p = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \right\rfloor$. Cet entier p vérifie évidemment $p \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$.

On pose alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\mathbb{1}_P(n)\, n^\alpha\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n vaut n^α si n est une puissance de 2, et 0 sinon.

Déjà, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_n}{n^\alpha} = \mathbb{1}_P(n)$, donc ce quotient ne tend pas vers 0 (par exemple car la sous-suite des termes de rang une puissance de 2 est constante, égale à 1).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par ailleurs

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_P(n)\, n^\alpha$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{p} (2^j)^\alpha \\
&= \sum_{j=0}^{p} (2^\alpha)^j \\
&= \frac{2^{\alpha(p+1)} - 1}{2^\alpha - 1} \\
&\leqslant \underbrace{\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1}}_{\text{(constante)}} 2^{\alpha p}.
\end{aligned}
$$

La minoration $p \leqslant \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}$ *et la croissance de l'exponentielle montrent que*

$$2^{\alpha p} = \exp\bigl(\alpha p \ln(2)\bigr) \leqslant \exp\left(\alpha \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \ln(2)\right) = \exp\bigl(\alpha \ln(n)\bigr) = n^\alpha.$$

Comme $\alpha < 1$, *on en déduit* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = O(n^\alpha) = o(n)$, *c'est-à-dire* $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ *: la suite* u *converge au sens de Cesàro vers* 0.

Remarque. *La suite* $\bigl((-1)^n n^\alpha\bigr)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *fonctionne également, mais c'est un peu plus pénible à démontrer (une transformation d'Abel montre par exemple* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^\alpha = O(n^\alpha)$, *ce qui conclut).*

5. **Une autre démonstration.** On va donner ici une nouvelle démonstration du théorème de Cesàro dans le cas essentiel où $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, ce que l'on suppose dans la suite.

   (a) **Un lemme souvent utile.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M(n) = \sup\bigl\{|u_k| \bigm| k \geqslant n\bigr\}$.

   Montrer que cette quantité est bien définie et que $M(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *notons* $\mathscr{M}(n) = \bigl\{|u_k| \bigm| k \geqslant n\bigr\}$.

   - *Cet ensemble est non vide, par exemple car* $u_n \in \mathscr{M}(n)$.
   - *Comme* u *converge, elle est bornée, c'est-à-dire que l'on peut trouver une constante* $C \in \mathbb{R}_+$ *telle que* $\forall k \in \mathbb{N}^*, |u_k| \leqslant C$. A fortiori, *on a* $\mathscr{M}(n) \subseteq [-C, C]$, *ce qui démontre que* $\mathscr{M}(n)$ *est bornée.*

   La quantité $M(n) = \sup \mathscr{M}(n)$ *est donc bien définie.*

   Pour montrer qu'elle converge vers 0, *on revient à la définition. Soit* $\varepsilon > 0$. *Comme* $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, *on peut donc trouver* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon$.

   Soit maintenant $n \geqslant N$. *Soit* $v \in \mathscr{M}(n)$. *On peut donc trouver* $k \geqslant n$ *tel que* $v = |u_k|$. *En particulier,* $k \geqslant N$ *donc* $v = |u_k| \leqslant \varepsilon$.

   On a donc démontré $\forall v \in \mathscr{M}(n), v \leqslant \varepsilon$.

   Par passage à la borne supérieure, cela démontre $M(n) = \sup \mathscr{M}(n) \leqslant \varepsilon$.

   La suite M *étant clairement positive, on a* $0 \leqslant M(n) \leqslant \varepsilon$, *donc* $|M(n)| \leqslant \varepsilon$, *ce qui conclut.*

   (b) Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n \in [\![1, n]\!]$. Montrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leqslant \frac{H_n}{n} M(1) + M(H_n).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En coupant au « seuil » H_n, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{H_n} \underbrace{|u_k|}_{\leqslant M(1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=H_n+1}^{n} \underbrace{|u_k|}_{\leqslant M(H_n)} \qquad \textit{(Chasles et inégalités triangulaires)}\\ &\leqslant \frac{H_n}{n}M(1) + \underbrace{\frac{\left|[\![H_n+1,n]\!]\right|}{n}}_{\leqslant 1} M(H_n)\\ &\leqslant \frac{H_n}{n}M(1) + M(H_n).\end{aligned}$$

(c) Conclure.

Prenons maintenant une suite de seuils $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $H_n = o(n)$ mais $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, en n'oubliant pas la contrainte $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n \in [\![1,n]\!]$. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convient, par exemple.

Dans la majoration obtenue à la question précédente :

- *on a $\dfrac{H_n}{n}M(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, parce que $H_n = o(n)$;*
- *on a $M(H_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par composition des limites §, car $M(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

Ainsi, $\dfrac{H_n}{n}M(1) + M(H_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ converge par le principe d'encadrement.

Partie II. Un théorème taubérien faible.

On fixe ici une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge au sens de Cesàro et qui vérifie l'hypothèse supplémentaire $u_{n+1} - u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Notons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(u_{n+1} - u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Nous allons montrer que u converge.

6. Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Par hypothèse, $v_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, c'est-à-dire $n\,v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Le théorème de Cesàro conclut alors !

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,v_k$ en fonction des premières valeurs de la suite u.

   On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\,v_k &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} v_k\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=\ell}^{n} v_k\end{aligned}$$

§. Techniquement, ce résultat de composition des limites suites/suites n'est pas dans le cours. Le résultat sur les suites extraites en est une espèce de version, mais on ne peut pas l'appliquer ici, car $n \mapsto H_n$ n'a aucune chance d'être une extractrice. Cependant, ce résultat de composition est immédiat à démontrer, en recopiant la démonstration donnée en cours pour les fonctions.

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} (u_{k+1} - u_k)$$
$$= \sum_{\ell=1}^{n} (u_{n+1} - u_\ell)$$
$$= n\, u_{n+1} - \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell.$$

8. Conclure.

En mettant ensemble les deux questions précédentes, on obtient $u_{n+1} - \dfrac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Or, par hypothèse, la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge. On en déduit, par opérations, la convergence de* $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$*, ce qui équivaut à la convergence de la suite* u.

Remarque. *La démonstration donne en particulier que* u *converge vers sa limite au sens de Cesàro. Mais le théorème de Cesàro nous disait déjà dès le début que c'était de toute façon la seule limite possible. Comme souvent, le difficile est de montrer la convergence, pas de déterminer la limite.*

Remarque. En 1910, le mathématicien anglais G. H. Hardy (1877-1947) a montré l'analogue du théorème de cette partie, sous l'hypothèse plus faible $u_{n+1} - u_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Tous les théorèmes qui permettent, à partir de la convergence d'une moyenne (en un sens très large) et d'une hypothèse de contrôle de la croissance, de montrer la convergence de la suite initiale sont appelés des *théorèmes taubériens*, en hommage à un théorème du mathématicien autrichien Alfred Tauber (1866-1942).

Partie III. Suites géométriques complexes.

9. Soit $\omega \in \mathbb{U}$.

Montrer que $(\omega^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge au sens de Cesàro et déterminer sa limite au sens de Cesàro.

- *Si* $\omega = 1$, *on sait que* $\omega^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *donc, d'après le théorème de Cesàro*[¶], *la suite* $(\omega^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge au sens de Cesàro vers* 1.
- *On suppose désormais* $\omega \neq 1$. *Montrons que* $(\omega^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge au sens de Cesàro vers* 0.

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On a*

$$\sum_{k=1}^{n} \omega^k = \frac{\omega - \omega^{n+1}}{1-\omega} \qquad \textit{(car } \omega \neq 1\textit{)}.$$

  La suite $(\omega^{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *étant bornée (c'est une suite de complexes de module* 1*), il s'ensuit que* $\left(\sum_{k=1}^{n} \omega^k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée. Après division par* n,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \omega^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

¶. J'ai réussi à appliquer le résultat du cours sur les suites géométriques et le théorème de Cesàro plutôt que de dire que la suite étant constante, ses moyennes n'allaient pas être très dures à calculer. Je suis très content de moi.

10. **Un cas très particulier.** Soit $\omega_1, \dots, \omega_r \in \mathbb{U}$.

   (a) Montrer que la suite $(\omega_1^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est périodique si et seulement si ω_1 est une racine t-ième de l'unité pour un certain entier $t \geqslant 1$.

   - *Supposons que $(\omega_1^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit périodique, et notons $t \geqslant 1$ une pédiode.*

     On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \omega_1^{n+t} = \omega_1^n$. En particulier, $\omega_1^{1+t} = \omega_1$. En multipliant de part et d'autre par $\overline{\omega_1} = \dfrac{1}{\omega_1}$, on obtient $\omega_1^t = 1$, c'est-à-dire $\omega_1 \in \mathbb{U}_t$.
   - *Réciproquement, supposons pouvoir trouver $t \geqslant 1$ tel que $\omega_1 \in \mathbb{U}_t$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\omega_1^{n+t} = \omega_1^n \underbrace{\omega_1^t}_{=1} = \omega_1^n$, ce qui montre que la suite est t-périodique.*

   (b) Montrer qu'une suite périodique converge si et seulement si elle est constante.

   Il est clair qu'une suite constante converge. Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite périodique convergente. Soit $t \geqslant 1$ une periode de u et ℓ sa limite.

   Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. On va montrer $u_n = u_m$.

   Les fonctions $\varphi : k \mapsto n + kt$ et $\psi : k \mapsto m + kt$ sont des extractrices donc $u_{n+kt} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$ et $u_{m+kt} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$. Or, ces deux sous-suites sont constantes, par t-périodicité.

   On a donc $u_n = \ell = u_m$ par unicité de la limite.

   (c) On suppose que toutes les suites $(\omega_1^n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \dots, (\omega_r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont périodiques.

   Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\omega_1^n + \cdots + \omega_r^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors la suite u est nulle.

   D'après la question précédente, il suffit de montrer que u est t-périodique.

   Pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, notons t_j une période de la suite $(\omega_j^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Remarquons que tout entier multiple de t_j est également une période de cette suite.

   On pose alors $T = t_1 \cdots t_r$ (ou, si l'on est économe, on prend pour T le PPCM des périodes...).

   Toutes les suites $(\omega_j^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont alors T-périodiques, donc leur somme u l'est également.

11. Soit $\omega_0 = 1, \omega_2, \dots, \omega_r \in \mathbb{U}$ distincts et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$.

    On suppose que $\alpha_0 + \alpha_1\omega_1^n + \cdots + \alpha_r\omega_r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\alpha_0 = 0$.

    Notons u la suite de l'énoncé. Comme elle converge vers 0, le théorème de Cesàro donne $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

    En éclatant la somme, cela signifie

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_1^k + \cdots + \frac{\alpha_r}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_r^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

    Comme tous les nombres complexes $\omega_1, \dots, \omega_r$ sont différents de $\omega_0 = 1$, on sait que les suites de leurs puissances convergent au sens de Cesàro vers 0. Ainsi, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $\dfrac{\alpha_j}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\omega_j^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_1^k + \cdots + \frac{\alpha_r}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_r^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha_0.$$

    Par unicité de la limite, $\alpha_0 = 0$.

12. Soit maintenant $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_1 q_1^n + \cdots + \alpha_r q_r^n = 0$.

    En utilisant ce qui précède, montrer que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$.

    On procède par l'absurde. Supposons que les α_j ne soient pas tous nuls. Quitte à jeter les termes correspondants à des α_j nuls (et à renuméroter), on peut même supposer qu'aucun des α_j n'est nul.

    On peut alors considérer le module maximal $\rho = \max\left\{|\omega_j| \,\middle|\, j \in [\![1, r]\!]\right\}$. Certains des complexes ω_j possèdent ce module, et on va séparer, dans la somme, cette élite de la plèbe des ω_j tels que $|\omega_j| < \rho$.

    Pour simplifier les notations, on va supposer quitte à renuméroter les α_j, que $|\omega_1| = \cdots = |\omega_s| = \rho$ alors que $|\omega_{s+1}| = \cdots = |\omega_r| < \rho$. L'entier s est compris entre 1 et r. (S'il vaut r, tous les complexes sont de module maximal, mais ça ne change rien).

    En divisant par ω_1^n, on a donc

    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \widetilde{\omega}_j^n = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \left(\frac{\omega_j}{\omega_1}\right)^n = 0,$$

    en posant, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $\widetilde{\omega}_j = \dfrac{\omega_j}{\omega_1}$.

    Notons que, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, le module de $\widetilde{\omega}_j$ est $\dfrac{|\omega_j|}{|\omega_1|} = \dfrac{|\omega_j|}{\rho}$. Il vaut donc 1 pour les s premiers complexes, et est < 1 pour les autres.

    En particulier, pour $j > s$, $\widetilde{\omega}_j^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. En passant à la limite, on obtient donc

    $$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \, \widetilde{\omega}_j^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

    avec s nombres complexes distincts $1 = \widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \dots, \widetilde{\omega}_s$.

    D'après la question précédente, on obtient $\alpha_1 = 0$, ce qui constitue une contradiction.

Remarque. *Dans le vocabulaire de l'algèbre linéaire, on a montré que la famille des suites $(\omega^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, pour $\omega \in \mathbb{C}^*$ est* libre. *On verra des preuves plus directes, mais celle-ci est très mignonne.*