
Sixième composition de mathématiques

Durée : quatre heures.

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Sauf mention explicite de l'énoncé, toutes vos affirmations doivent être justifiées.

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- ▶ *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- ▶ *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats.*
- ▶ *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- ▶ *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1. Dénombrement de marches.

Dans cet exercice, on va imaginer un individu « marchant » dans $\mathbb{Z}$. Le point de départ est en 0 et, à chaque instant, l'individu fait un pas « +1 » (c'est-à-dire qu'il se déplace vers l'entier immédiatement supérieur) ou « -1 » (c'est-à-dire qu'il se déplace vers l'entier immédiatement inférieur).

Plus précisément, on pourra représenter une *marche de longueur* $\ell \geq 1$ de diverses façons.

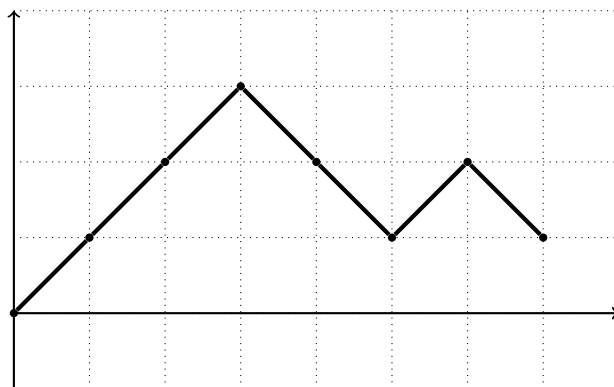
- On pourra donner une liste $^* [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\ell]$ des *pas* de la marche, valant tous 1 ou -1.
Par exemple, $[1, 1, 1, -1, -1, 1, -1]$ décrit une certaine marche de longueur 7.
- On pourra préférer donner la liste $(s_0, s_1, \dots, s_\ell)$ des *positions* occupées successivement par le marcheur, commençant impérativement par la position initiale $s_0 = 0$:

$$s_0 = 0, \quad s_1 = \varepsilon_1, \quad s_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad s_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \dots \quad s_\ell = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_\ell.$$

Par exemple, la même marche de longueur 7 peut être décrite par la liste des positions †

$$\begin{array}{cccccccc} & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ (& 0 & , & 1 & , & 2 & , & 3 & , & 2 & , & 1 & , & 2 & , & 1 &) . \end{array}$$

- Enfin, on pourra représenter la liste des positions par son graphe, le temps étant indiqué en abscisse et la position dans $\mathbb{Z}$ représentée en ordonnée. La même marche correspond alors au graphe suivant :



La marche donnée par les pas $[1, 1, 1, -1, -1, 1, -1]$ ou par les positions $(0, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1)$.

Dans tout l'exercice, on fixe un entier $n \geq 3$.

1. Combien y a-t-il au total de marches de longueur $2n$?
2. Combien y a-t-il de marches de longueur $2n$ dont toutes les positions appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$?
3. Combien y a-t-il de marches de longueur $2n$ dont la dernière position s_{2n} est 0 ?
4. (a) Combien y a-t-il de marches de longueur n dont l'une au moins des positions est n ?
(On dira que la valeur n est *atteinte* par la marche).
- (b) Combien y a-t-il de marches de longueur n atteignant la valeur $n - 1$?
- (c) Combien y a-t-il de marches de longueur n atteignant la valeur $n - 2$?
5. (a) Combien y a-t-il de marches de longueur $5n$ dont la n -ième position s_n est n et la dernière position s_{5n} est $-n$?
- (b) $^+$ Combien y a-t-il de marches de longueur $5n$ dont la n -ième position s_n et la dernière position s_{5n} sont n , et dont l'une des positions intermédiaires s_k (pour $k \in \llbracket n, 5n \rrbracket$) est 0 ?
- (c) $^{++}$ Combien y a-t-il de marches de longueur $5n$ dont la n -ième position s_n et la dernière position s_{5n} sont n , et dont toutes les positions sont ≥ 0 ?

*. Pour éviter toute confusion, je vais noter la liste des pas avec des crochets, mais cela ne fait pas de différence mathématique.

†. On pourra passer quelques secondes à méditer sur la parité de ces huit entiers...

Exercice 2. Des suites récurrentes.

On introduit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + x^2 \end{cases}$ et on va étudier les suites récurrentes dont l'itératrice est f .

Toutes les suites notées $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'énoncé vérifieront donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Étudier la fonction f et en dresser rapidement un graphe et un tableau de variations.
2. On suppose $u_0 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $u_0 \in [0, +\infty[$.
4. Que se passe-t-il dans les cas $u_0 \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ et $u_0 \in]-\infty, -1]$?
5. On suppose dans cette question $u_0 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

En introduisant une suite auxiliaire de la forme $(u_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$, déterminer un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6. Dans cette dernière question, on suppose $u_0 > 1$ et on cherche là encore à obtenir un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (a) Déterminer l'expression de la suite récurrente $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $w_0 = \ln(u_0)$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 2w_n + 1$.
 - (b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \leq w_n$.
 - (c) Montrer que la suite $\left(\frac{\ln(u_n)}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 - (d) En notant α la limite de la suite précédente, montrer $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \alpha - \frac{\ln(u_n)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n u_n}$.
 - (e) En déduire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$.

Problème. Autour du théorème de (Cauchy-)Cesàro.

Pour fixer les notations, on rappelle une forme du théorème de Cesàro[‡].

Théorème.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ une suite complexe indexée par $\mathbb{N}^*$.

S'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Dans toute la suite du problème, étant donné une suite (réelle ou complexe) $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on dira que u converge au sens de Cesàro (en abrégé : C -converge) si la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Cette limite sera appelée la *limite au sens de Cesàro* (en abrégé : la C -limite) de la suite u .

Les parties du problème sont largement indépendantes, et pas spécialement classées par difficulté croissante.

Partie I. Généralités.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

(a) En utilisant une fonction convexe, montrer que pour tout $n \geq 1$ et tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

(b) En déduire $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

2. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle monotone.

Montrer que si u converge au sens de Cesàro, alors elle converge.

3. Quelles sont les suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$?

4. **Conséquences asymptotiques de la convergence (au sens de Cesàro).**

(a) Montrer que si une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, alors elle est bornée.

(Cette propriété a été démontrée en cours dans le cas des suites réelles. Je vous demande ici une démonstration dans le cadre complexe : c'est presque une question de cours.)

(b) Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge au sens de Cesàro, alors $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(n)$.

(c)⁺ Soit $\alpha \in]0, 1[$.

Construire une suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente au sens de Cesàro telle que $v_n \neq o_{n \rightarrow +\infty}(n^\alpha)$.

5. **Une autre démonstration.** On va donner ici une nouvelle démonstration du théorème de Cesàro dans le cas essentiel où $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, ce que l'on suppose dans la suite.

(a) **Un lemme souvent utile.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M(n) = \sup \{|u_k| \mid k \geq n\}$.

Montrer que cette quantité est bien définie et que $M(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

(b) Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq \frac{H_n}{n} M(1) + M(H_n).$$

(c) Conclure.

[‡]. Qui n'est pas tout à fait celle du cours, mais la démonstration du cours s'adapte sans aucun problème.

Partie II. Un théorème taubérien faible.

On fixe ici une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge au sens de Cesàro et qui vérifie l'hypothèse supplémentaire $u_{n+1} - u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Notons $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Nous allons montrer que u converge.

6. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum_{k=1}^n k v_k$ en fonction des premières valeurs de la suite u .

Indication. On pourra écrire $\sum_{k=1}^n k v_k = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^k v_k$.

8. Conclure.

Remarque. En 1910, le mathématicien anglais G. H. Hardy (1877-1947) a montré l'analogue du théorème de cette partie, sous l'hypothèse plus faible $u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Tous les théorèmes qui permettent, à partir de la convergence d'une moyenne (en un sens très large) et d'une hypothèse de contrôle de la croissance, de montrer la convergence de la suite initiale sont appelés des *théorèmes taubériens*, en hommage à un théorème du mathématicien autrichien Alfred Tauber (1866-1942).

Partie III. Suites géométriques complexes.

On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

9. Soit $\omega \in \mathbb{U}$.

Montrer que $(\omega^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge au sens de Cesàro et déterminer sa limite au sens de Cesàro.

10. **Un cas très particulier.** Soit $\omega_1, \dots, \omega_r \in \mathbb{U}$.

(a) Montrer que la suite $(\omega_1^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est périodique si et seulement si ω_1 est une racine t -ième de l'unité pour un certain entier $t \geq 1$.

(b) Montrer qu'une suite périodique converge si et seulement si elle est constante.

(c) On suppose que toutes les suites $(\omega_1^n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \dots, (\omega_r^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont périodiques.

Notons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\omega_1^n + \dots + \omega_r^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Montrer que si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors la suite u est nulle.

11. Soit $\omega_0 = 1, \omega_2, \dots, \omega_r \in \mathbb{U}$ distincts et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$.

On suppose que $\alpha_0 + \alpha_1 \omega_1^n + \dots + \alpha_r \omega_r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\alpha_0 = 0$.

12. Soit maintenant $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_1 q_1^n + \dots + \alpha_r q_r^n = 0$.

En utilisant ce qui précède, montrer que $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$.