Septième composition de mathématiques

Durée : *quatre heures.*

Les documents, calculatrices, etc. sont ***interdits****.*

Sauf mention explicite de l'énoncé, toutes vos affirmations doivent être justifiées.

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci* $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *ou de* <u>*souligner*</u> *vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1. Interro de calcul du vendredi.

1. Calculer un développement asymptotique à deux termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((n+1)^{5/3} - n^{5/3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire un équivalent de $\left(\exp(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = u^3$.

1. Montrer que si $\ker(u) + \mathrm{im}(u) = E$, alors u est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{im}(u) = \mathrm{im}(u^2) \oplus \left(\ker(u) \cap \mathrm{im}(u)\right)$.

Exercice 3

Cet exercice est difficile. Ne l'abordez pas tout de suite...

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n\,(1 - u_n)$.

Montrer que u diverge.

Problème A. Théorème de Posner pour $M_2(K)$.

Dans tout ce problème, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et toutes les notions d'algèbre linéaire sont à comprendre avec K comme corps des scalaires.

On rappelle qu'une matrice est dite *scalaire* si et seulement si elle appartient à $\mathrm{Vect}(I_2)$.

Partie I. Généralités sur le commutant.

Étant donné $A \in M_2(K)$, on définit

- $\mathscr{V}(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$;
- son *commutant* $\mathscr{C}(A) = \{B \in M_2(K) \mid AB = BA\}$.

1. Soit $A \in M_2(K)$.
   (a) Montrer que $\mathscr{V}(A)$ et $\mathscr{C}(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_2(K)$.
   (b) Montrer que $\mathscr{V}(A) \subseteq \mathscr{C}(A)$.
2. Soit $A \in M_2(K)$.
   (a) Calculer $A^2 - \mathrm{tr}(A)\,A$.
   (b) En déduire que $\mathscr{V}(A)$ est stable par produit.
   (c) Le sous-espace vectoriel $\mathscr{C}(A)$ est-il stable par produit ?
3. On suppose A inversible. Montrer que A^{-1} appartient à la fois à $\mathscr{C}(A)$ et $\mathscr{V}(A)$.

Partie II. Détermination du commutant.

4. Soit $A \in M_2(K)$. Montrer que $\mathscr{C}(A) = M_2(K)$ si et seulement si A est une matrice scalaire.
5. **Un lemme sur la condition** $AB = BA = 0$**.** Le but de cette question est de montrer le résultat suivant.

   > **Lemme.** Soit $A \in M_2(K)$, non nulle et non inversible. Alors toute matrice $B \in M_2(K)$ telle que $AB = BA = 0_{M_2(K)}$ appartient à $\mathscr{V}(A)$.

   On fixe donc dans toute la question une matrice $A \in M_2(K)$ non nulle et non inversible.

   (a) Montrer que $\dim\big(\ker A\big) = 1$ et $\dim\big(\mathrm{im}\, A\big) = 1$.

   En utilisant le théorème de la base incomplète, on en déduit l'existence de bases $\mathscr{X} = (x_0, x_1)$ et $\mathscr{Y} = (y_0, y_1)$ de K^2 telles que $Ax_0 = 0_{K^2}$ et $Ax_1 = y_1$. (On ne demande pas de le justifier.)

   (b) Montrer $\ker(A) = \mathrm{Vect}(x_0)$ et $\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}(y_1)$.
   (c) Montrer qu'une matrice $B \in M_2(K)$ vérifie $AB = BA = 0_{M_2(K)}$ si et seulement s'il existe un scalaire $\mu \in K$ tel que $By_0 = \mu x_0$ et $By_1 = 0_{K^2}$.
   (d) Montrer qu'il existe une matrice non nulle $H \in \mathscr{V}(A)$ telle que $AH = 0_{M_2(K)}$.

   Indication. *On pourra utiliser la question 2a.*

   (e) Conclure la démonstration du lemme.
6. Soit $A \in M_2(K)$ et $B \in \mathscr{C}(A)$. On suppose la famille (I_2, A, B) libre et $AB \in \mathrm{Vect}(I_2, A, B)$.
   (a) Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in K$ tels que $(A - \lambda I_2)(B - \mu I_2) \in \mathrm{Vect}(I_2)$.
   (b) En déduire que $B \in \mathscr{V}(A)$, et aboutir à une contradiction.
7. Soit $A \in M_2(K)$ non scalaire. Montrer que $\mathscr{C}(A) = \mathscr{V}(A)$.

Partie III. Sections linéaires de $\mathscr{C}(\cdot)$.

Dans cette partie, on veut déterminer les endomorphismes $f \in \mathscr{L}\big(M_2(K)\big)$ vérifiant la condition

$$\forall A \in M_2(K), f(A)\,A = A\,f(A), \tag{S}$$

c'est-à-dire tels que, pour tout $A \in M_2(K)$, $f(A) \in \mathscr{C}(A)$.

8. Soit $\varphi : M_2(K) \to K$ une application linéaire et $\lambda \in K$. Montrer que $\begin{cases} M_2(K) \to & M_2(K) \\ A & \mapsto \varphi(A)\,I_2 + \lambda A \end{cases}$ est un endomorphisme vérifiant la condition (S).
9. On note $\mathscr{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $M_2(K)$.

   Étant donné quatre indices $i, j, k, \ell \in [\![1, 2]\!]$, déterminer à quelle condition la famille de trois matrices $(I_2, E_{i,j}, E_{k,\ell})$ est libre.
10. Montrer que tous les endomorphismes de $M_2(K)$ vérifiant la condition (S) sont de la forme donnée à la question 8.

Partie IV. Théorème de Posner.

Une *dérivation* de $M_2(K)$ est un endomorphisme $d \in \mathscr{L}\big(M_2(K)\big)$ tel que

$$\forall A, B \in M_2(K), d(AB) = A\,d(B) + d(A)\,B.$$

11. Montrer que l'endomorphisme nul est l'unique dérivation de $M_2(K)$ vérifiant la condition de commutation $\forall A \in M_2(K), d(A)A = Ad(A)$.

Problème B. Inégalités de Landau-Kolmogorov.

Dans tout le problème sauf la dernière question, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2.

On rappelle que si $g : I \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée définie sur un intervalle I, sa *norme uniforme* est

$$\|g\|_\infty = \sup\left\{|g(t)| \,\middle|\, t \in I\right\}.$$

1. **(In)égalité de Taylor-Lagrange.** Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ deux points différents.

   (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $g_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(x) - \big(f(a) + f'(a)\,(x-a)\big) - \lambda \dfrac{(x-a)^2}{2}. \end{cases}$

   Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g_\lambda(a) = g'_\lambda(a) = g_\lambda(b) = 0$.

   Dans la suite de la question, on choisit cette valeur de λ.

   (b) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $g''_\lambda(c) = 0$.

   (c) En déduire une expression de $f(b)$, en fonction de $f(a)$, $f'(a)$ et $f''(c)$.

   (d) On suppose f'' bornée. Déduire de la formule précédente l'inégalité

   $$\left|f(b) - \big(f(a) + f'(a)\,(b-a)\big)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\|f''\|_\infty.$$

2. **Inégalité de Landau (1914).** On suppose les fonctions f et f'' bornées sur $\mathbb{R}_+$.

   (a) Montrer que f' est bornée et que

   $$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall \theta > 0, |f'(a)| \leqslant \frac{2}{\theta}\|f\|_\infty + \frac{\theta}{2}\|f''\|_\infty.$$

   (b) En déduire l'inégalité $\|f'\|_\infty \leqslant K\sqrt{\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$, pour une certaine constante K.

   (On cherchera à obtenir la meilleure constante K *possible, mais pas à démontrer qu'il est impossible de faire mieux).*

Les questions suivantes sont plus difficiles. Elles sont indépendantes les unes des autres.

3. **Un peu d'analyse dimensionnelle.** Soit $n \geqslant 2$. En 1938, Kolmogorov a considérablement généralisé l'inégalité de Landau en montrant que si $f \in C^n(\mathbb{R}_+)$ est telle que f et $f^{(n)}$ sont bornées, alors il en va de même de toutes les dérivées intermédiaires et l'on a les inégalités

   $$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \|f^{(k)}\|_\infty \leqslant K_{n,k}\,\|f\|_\infty^{\alpha_{n,k}}\,\|f^{(n)}\|_\infty^{\beta_{n,k}},$$

   pour un certain choix de constantes $K_{n,k}$ et d'exposants $\alpha_{n,k}, \beta_{n,k} \geqslant 0$.

   En admettant ce résultat, déterminer les exposants $\alpha_{n,k}$ et $\beta_{n,k}$.

4. **Un corollaire qualitatif.** Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$, telle que f'' soit bornée. On suppose que la fonction f converge au voisinage de $+\infty$.

   Montrer que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ en utilisant l'inégalité de Landau.

5.$^+$ **Une variante sur $\mathbb{R}$ avec une meilleure constante : inégalité de Hadamard (1914).** On considère une fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ bornée, et telle que f'' soit bornée.

   Montrer que f' est bornée et que $\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$.