

---

## Polynômes

---

### Thèmes Polynômes

Dans tout le chapitre,  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ .

- ▶ Définition, opérations algébriques, règles de calcul.
- ▶ Évaluation d'un polynôme et fonctions polynomiales.
- ▶ Degré. Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée.
- ▶ Division euclidienne.
- ▶ Racines : généralités, théorème de factorisation, « critère radical de nullité » et corollaires : rigidité des polynômes, identification des coefficients d'une fonction polynomiale. Racines complexes d'un polynôme réel.
- ▶ Dérivation : règles de calcul, degré, dérivées d'ordre supérieur. Formule de Taylor pour les polynômes.
- ▶ Interpolation de Lagrange.
- ▶ Multiplicité  $\mu_z(P)$  d'une racine  $z$  de  $P$ , non nul (étendue ensuite aux cas  $P(z) \neq 0$ , et  $P = 0$ ). Multiplicité d'une somme, d'un produit. Critère radical de nullité (dans la version avec multiplicités). Caractérisation différentielle de la multiplicité. Cas des polynômes réels :  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall z \in \mathbb{C}, \mu_{\bar{z}}(P) = \mu_z(P)$ .
- ▶ Polynômes scindés : définition, dérivée d'un polynôme réel (simplement) scindé
- ▶ Relations coefficients-racines (seulement pour la somme et le produit).
- ▶ Caractère absolu de la divisibilité.
- ▶ Polynômes irréductibles. Les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Les autres polynômes irréductibles n'ont pas de racines, mais la réciproque est fautive.
- ▶ Théorème de D'Alembert-Gauss. Décomposition en facteurs irréductibles sur  $\mathbb{C}$ . Un polynôme  $A$  divise  $B$  si et seulement si  $\forall z \in \mathbb{C}, \mu_z(A) \leq \mu_z(B)$ .
- ▶ « Polynôme minimal réel » d'un nombre complexe non réel. Décomposition en facteurs irréductibles sur  $\mathbb{R}$ .

### Questions de cours

- ▶ Degré d'une somme.
- ▶ Degré d'un produit.
- ▶ Théorème de factorisation.
- ▶ Interpolation de Lagrange.
- ▶  $\mu_z(P_1 P_2) = \mu_z(P_1) + \mu_z(P_2)$ .