Suites, dénombrement

Thèmes

Suites

- Généralités : monotonie, caractère borné. Propriétés vraies à partir d'un certain rang (dont « stationnaire » = « constant àpcr »).
- Premières suites récurrentes : suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- Convergence, définition et premières propriétés : unicité de la limite, caractère asymptotique, convergente implique bornée, principe d'encadrement.
- Limites et inégalités : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > c$, alors $u_n > c$ à partir d'un certain rang. et passage à la limite dans les inégalités larges.
- Suites tendant vers $\pm\infty$. Unicité de la limite dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
- Théorèmes de convergence :
  - théorème des gendarmes, de minoration, de majoration ;
  - théorèmes d'opérations ;
  - théorème de la limite monotone, suites adjacentes.
- Démonstration de la caractérisation séquentielle de l'adhérence.
- Extension aux suites à valeurs complexes (et notamment équivalence des deux définitions naturelles de la convergence dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$).
- Suites extraites : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$; si $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Application à la divergence de la série harmonique.

  Complément : théorème de Bolzano-Weierstrass.
- Analyse asymptotique : notations o, O, $\sim$.
- Complément : théorème de Cesàro et lemme de l'escalier.
- Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: réflexes de base. On a traité en cours un exemple avec une itératrice croissante et un avec une itératrice décroissante (au moins en restriction à un intervalle stable). On a également traité trois exemples de nature asymptotique : deux équivalents de suites récurrentes ($u_{n+1} = \sin u_n$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$) et un développement asymptotique d'une suite implicite ($u_n + e^{u_n} = n$).

Dénombrement

- Principes de dénombrement : bijection, addition, soustraction, multiplication. Lemme des bergers.
- Dénombrements classiques : listes/mots, listes sans répétitions (arrangements), parties, parties de cardinal fixé.
- Propriétés déja connues (symétrie, formule de Pascal, binôme de Newton) ou non (formule d'absorption, convolution de Vandermonde) des binomiaux avec un regard combinatoire.
- Nombre d'anagrammes d'un mot.
- Astuce *bars and stars* pour dénombrer les « compositions » d'un entier n, c'est-à-dire les p-uplets $(t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{N}^p$ de somme n.

Questions de cours

- Toute suite convergente est bornée (y compris le lemme).

- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > c$, alors $u_n > c$ à partir d'un certain rang.
- Passage à la limite dans les inégalités larges.
- Caractérisation séquentielle de l'adhérence.
- Divergence de la série harmonique : $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Quel est le genre du mot « anagramme » ?