

---

## Continuité, dérivation

---

### Thèmes

#### Continuité

- ▶ Définition des limites.
- ▶ Notion de limite ordinaire, par valeurs inférieures/supérieures, différentes. Lien entre ces notions.
- ▶ Généralités : caractère local de la limite, unicité de la limite, les fonctions convergentes sont localement bornées, passage à la limite des inégalités larges, si une limite est  $> c$ , la fonction est localement  $> c$  (« antipassage à la limite des inégalités strictes »).
- ▶ Théorèmes de convergence : théorèmes d'opérations, y compris les « compositions » entre fonctions et suites du type  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ , théorème de la limite monotone, théorème des gendarmes et de minoration/majoration.
- ▶ Continuité : caractère local, continuité à gauche et à droite, théorèmes d'opérations.
- ▶ Fonctions lipschitziennes.
- ▶ Prolongement par continuité.
- ▶ Théorème des valeurs intermédiaires.
- ▶ Continuité de la réciproque d'une bijection continue strictement monotone.
- ▶ Théorème des bornes atteintes.
- ▶ Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.

#### Dérivation

Toutes les techniques de calcul vues au chapitre *calculus* (y compris concernant les dérivées n-ièmes et les fonctions de classe  $C^n$ ) sont exigibles.

- ▶ Dérivabilité au sens de Carathéodory. Démonstration de deux résultats : dérivation des fonctions composées, critère de dérivabilité des fonctions réciproques.
- ▶ Dérivées à gauche et à droite.
- ▶ Extremum local en un point intérieur.
- ▶ Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis. Monotonie et signe de la dérivée.
- ▶ Théorème de la limite de la dérivée.
- ▶ Propriétés des fonctions de classe  $C^1$  : lipschitzianité locale, conséquence de  $f'(a) > 0$ . Exemples de fonctions dérivables mais pas  $C^1$ .
- ▶ Extension aux fonctions complexes. Inégalité des accroissements finis (énoncée dans le cas  $C^1$ , démontrée dans le cas dérivable).

#### Questions de cours

- ▶ La fonction  $\cos$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .
- ▶ Dérivation des fonctions composées.
- ▶ Théorème de Rolle.
- ▶ Théorème des accroissements finis.
- ▶ Un exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe  $C^1$ .