Ensembles

Exercice 8.

Revenir aux définitions de l'inclusion et de l'ensemble des parties. Il faudra faire très attention au **type** des objets (s'agit-ils d'entiers ? d'ensembles d'entiers ?).

Exercice 9.

On pourra montrer l'égalité $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ en suivant les canevas de preuves standard.

Pour montrer que l'autre égalité est, en général, fausse, commencer par dessiner des diagrammes de Venn.

Exercice 13.

Pour la toute dernière question, remarquer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $[\![0, n]\!]$ contient 0.

Exercice 14.

Comment peut-on exploiter l'hypothèse selon laquelle A est non vide ?

Une fois que cela est fait, qu'est-ce que l'assertion

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \in A \Rightarrow n + 1 \in A,$$

plus faible que l'hypothèse de l'énoncé, permet déjà de démontrer ?

Exercice 15.

La condition simple suggérée par l'énoncé est $A \subseteq B$.

Exercice 16.

Pour la dernière question, la question 2 permet de construire assez facilement des contre-exemples.

Autocorrection

Autocorrection A.

- Par définition, $E \subseteq F$ est équivalente à $\forall x \in E, x \in F$. Sa négation est donc $\exists x \in E : x \notin F$.

  Pour montrer que E *n'est pas inclus dans* F*, il s'agit de trouver un élément de* E *qui n'appartienne pas à* F.

- L'assertion $E = F$ est équivalente à $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$. Sa négation est donc $E \nsubseteq F$ ou $F \nsubseteq E$. D'après ce que l'on vient de dire, la négation de $E = F$ est équivalente à

$$\exists x \in E : x \notin F \text{ ou } \exists x \in F : x \notin E.$$

  Pour montrer que E *et* F *sont deux ensembles différents, il s'agit de trouver un élément de l'un des deux qui n'appartienne pas à l'autre.*

Autocorrection B.

On a

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

Il y a à chaque fois plusieurs façons de faire, donnons quelques exemples.

(i) $\varnothing = A \setminus A = B \setminus B$;
(ii) $\{1\} = A \setminus B$;
(iii) $\{2\} = A \cap B$;
(iv) $\{3\} = B \setminus A$;
(v) $\{1,2\} = A$;
(vi) $\{1,3\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
(vii) $\{2,3\} = B$;
(viii) $\{1,2,3\} = A \cup B$.

Autocorrection C.

(i) Montrons la première égalité. Comme le terme de gauche est manifestement une partie de E, il suffit de montrer l'inclusion réciproque $A \cup (E \setminus A) \supseteq E$.

Soit $x \in E$.

Montrons $x \in A \cup (E \setminus A)$, c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in E \setminus A$.

On va procéder en suivant le canevas standard, c'est-à-dire en supposant la négation de l'une des assertions et en montrant l'autre.

Supposons $x \notin A$.

On a donc à la fois $x \in E$ et $x \notin A$, ce qui montre $x \in E \setminus A$.

Cela conclut.

(ii) Montrons l'égalité par double inclusion.

- Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$. On cherche à montrer que $x \in A$.

  Distinguons deux cas.
  - Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ (et $x \in B$).
  - Si $x \in A \setminus B$, alors $x \in A$ (et $x \notin B$).

  Dans tous les cas, on a bien $x \in A$, ce qui montre l'inclusion $(A \cap B) \cup (A \setminus B) \subseteq A$.
- Réciproquement, soit $x \in A$.

  Distinguons deux cas.
  - Si $x \in B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$. *A fortiori*, $x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.
  - Si $x \notin B$, alors $x \in A$ et $x \notin B$, donc $x \in A \setminus B$. *A fortiori*, $x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

  Dans tous les cas, on a bien $x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, ce qui montre l'inclusion réciproque, et conclut.

Remarque. La première question est en fait un cas particulier de celle-ci, dans le cas $B = E$.

(iii) Supposons $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$.

Soit $x \in A$. Montrons $x \in C$.

Puisque $A \subseteq B$ et $x \in A$, on a $x \in B$.
Puisque $B \subseteq C$ et $x \in B$, on a $x \in C$.

Cela montre $A \subseteq C$.

On a donc montré l'implication $(A \subseteq B \text{ et } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$.

(iv) On procède par double implication.

- Supposons $A \subseteq B$.

  Soit $x \in E \setminus B$. On a donc $x \in E$ et $x \notin B$.

  L'élément x n'appartient alors pas à A. (Si l'on avait $x \in A$, l'inclusion $A \subseteq B$ entraînerait $x \in B$, ce qui est absurde). On a donc $x \in E$ et $x \notin A$, ce qui montre $x \in E \setminus A$.
- Pour démontrer l'inclusion réciproque, on pourrait refaire une preuve très semblable à celle que nous venons de faire. Mais on peut procéder autrement.

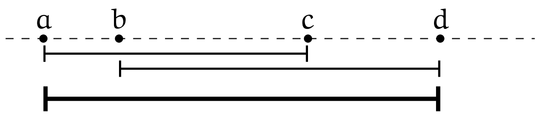
  On a en effet montré qu'étant donné deux ensembles $A, B \subseteq E$, on avait l'implication $E \setminus B \subseteq E \setminus A$. En appliquant cette implication aux ensembles $E \setminus B$ et $E \setminus A$, on en déduit l'implication

  $$E \setminus B \subseteq E \setminus A \Rightarrow E \setminus (E \setminus A) \subseteq E \setminus (E \setminus B),$$

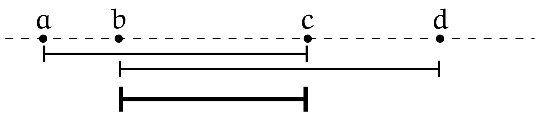
  ce qui montre l'inclusion réciproque $E \setminus B \subseteq E \setminus A \Rightarrow A \subseteq B$.

Autocorrection D.

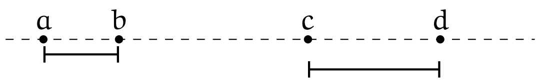
(i) On a $[a, c] \cup [b, d] = [a, d]$.



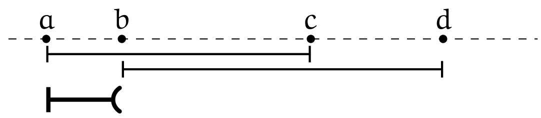
(ii) On a $[a, c] \cap [b, d] = [b, c]$.



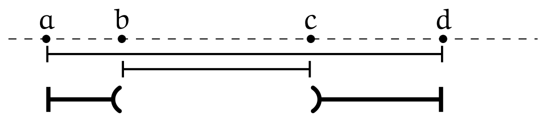
(iii) On a $[a, b] \cap [c, d] = \varnothing$.



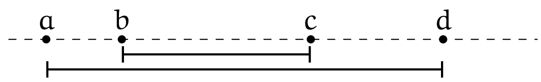
(iv) On a $[a, c] \setminus [b, d] = [a, b[$.



(v) On a $[a, d] \setminus [b, c] = [a, b[\cup]c, d]$.



(vi) On a $[b, c] \setminus [a, d] = \varnothing$.



Autocorrection E.

(i) L'assertion est équivalente à $\Omega = A = B$.

En effet, supposons $\Omega = A = B$ et montrons l'assertion (i).

Soit $x \in \Omega$.

- Puisque $\Omega = A$, on a $x \in A$.
- De même, puisque $\Omega = B$, on a $x \in B$.

On a donc $x \in A$ et $x \in B$, ce qui achève la preuve de (i).

Réciproquement, supposons (i) et montrons $\Omega = A = B$.

- Soit $x \in \Omega$.

  D'après (i), on a $x \in A$ et $x \in B$. *A fortiori*, cela montre $x \in A$. On a donc l'inclusion $\Omega \subseteq A$.

- ▶ Réciproquement, on sait déjà que $A \subseteq \Omega$ (A est par définition une partie de Ω).

On a donc bien $\Omega = A$. Les parties A et B jouant des rôles parfaitement symétriques, on démontre exactement de la même façon que $\Omega = B$.

(ii) L'assertion est équivalente à $A \cup B = \Omega$.

En effet, supposons $A \cup B = \Omega$ et montrons l'assertion (ii).

Soit $x \in \Omega$.

Puisque $A \cup B = \Omega$, on a $x \in A \cup B$, c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in B$.

Réciproquement, supposons (ii) et montrons $A \cup B = \Omega$, par double inclusion.

- ▶ Soit $x \in A \cup B$. On distingue deux cas : si $x \in A$, on a $x \in \Omega$ car $A \subseteq \Omega$; si $x \in B$, on a $x \in \Omega$ car $B \subseteq \Omega$. Dans tous les cas, on a donc bien $x \in \Omega$.
- ▶ Réciproquement, soit $x \in \Omega$. D'après (ii), on a $x \in A$ ou $x \in B$, c'est-à-dire exactement $x \in A \cup B$.

(iii) L'assertion est équivalente à $A \subseteq B$, c'est la définition vue en cours.

(iv) L'assertion est équivalente à $A = B$, comme on le démontre facilement.

(v) L'assertion est équivalente à « A et B sont disjoints », c'est-à-dire à $A \cap B = \varnothing$.

En effet, supposons $A \cap B = \varnothing$ et montrons (v).

Soit $x \in \Omega$ tel que $x \in A$.

Puisque $A \cap B = \varnothing$, on a nécessairement $x \notin B$ (si ce n'était pas le cas, on aurait $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$, ce qui contredit directement l'hypothèse).

Réciproquement, supposons (v) et montrons $A \cap B = \varnothing$.

Pour cela, supposons par l'absurde que $A \cap B$ soit non vide.

Cela signifie qu'on peut trouver un élément $y \in A \cap B$, c'est-à-dire tel que $y \in A$ et $y \in B$.

D'après (v), puisque $y \in A$, on a $y \notin B$. Cela contredit directement ce qui précède et achève la preuve par l'absurde.

On a donc bien montré que $A \cap B = \varnothing$.

(vi) L'assertion est équivalente à $B \subseteq A$.

En effet, supposons $B \subseteq A$ et montrons (vi).

Soit $x \in \Omega$. Montrons $x \in A$ ou $x \notin B$.

Pour cela, supposons $\text{non}(x \notin B)$, c'est-à-dire $x \in B$.

Comme $B \subseteq A$, cela entraîne $x \in A$.

On a donc montré que $\text{non}(x \notin B)$ implique $x \in A$, c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \notin B$.

Réciproquement, supposons (vi) et montrons $B \subseteq A$.

Soit $x \in B$.

D'après (vi), on a $x \in A$ ou $x \notin B$.

Comme $x \in B$, on a nécessairement $x \in A$.

Remarque. On pourrait aussi montrer, par exemple par une table de vérité, que si P et Q sont deux assertions, l'assertion P ou non Q est équivalente à $Q \Rightarrow P$. L'assertion (vi) est donc équivalente à $\forall x \in \Omega, x \in B \Rightarrow x \in A$, ce qui est la définition de $B \subseteq A$.

(vii) L'assertion est équivalente à $A \neq \Omega$.

En effet, supposons $A \neq \Omega$ et montrons (vii).

Dire que $A \neq \Omega$ revient à dire que $A \not\subseteq \Omega$ ou que $\Omega \not\subseteq A$. Comme par hypothèse A est une partie de Ω, la première assertion est impossible, donc on a nécessairement $\Omega \not\subseteq A$. On peut donc trouver un élément $x \in \Omega$ tel que $x \notin A$.

Montrons maintenant $\exists X \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\} : A \cap X = \varnothing$.

Candidat : $X = \{x\}$.

- Il s'agit bien d'une partie non vide de Ω, donc on a $X \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}$.
- Comme $x \notin A$, on a bien $A \cap X = \varnothing$, ce qui conclut la preuve de (vii).

Réciproquement, supposons (vii) et montrons $A \neq \Omega$.

On peut donc trouver une partie $X \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}$ telle que $X \cap A = \varnothing$.

Puisque X est non vide, on peut en trouver un élément $x \in X$.

Comme $X \cap A = \varnothing$, on a $x \notin A$.

On a donc bien trouvé un élément de Ω qui n'est pas élément de A, ce qui montre $A \neq \Omega$.

(viii) L'assertion est équivalente à $A \subseteq B$.

En effet, supposons $A \subseteq B$ et montrons (viii).

Soit $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que $X \cap A \neq \varnothing$.

On peut donc trouver un élément $x \in X \cap A$.

En particulier, $x \in A$. Comme $A \subseteq B$, on a $x \in B$.

Cela entraîne que $x \in X \cap B$, ce qui montre $X \cap B \neq \varnothing$.

Réciproquement, supposons (viii) et montrons $A \subseteq B$.

Soit $x \in A$.

Appliquons la $\forall$-assertion (viii) à la partie $X = \{x\}$ de Ω. Elle vérifie bien l'hypothèse $X \cap A \neq \varnothing$, car l'élément x appartient à la fois à X et à A.

D'après (viii), on en déduit $X \cap B \neq \varnothing$.

Par ailleurs, l'intersection $X \cap B$ est une partie de $X = \{x\}$, donc il ne peut s'agir que de $\varnothing$ ou X. Vu ce qui précède, on a nécessairement $X \cap B = \{x\}$, donc $x \in X \cap B$, donc $x \in B$, ce qui achève la preuve.

Autocorrection F.

(i) On procède par double implication.

Sens direct. Si $A = B$, on a $A \cap B = A \cap A = A$ et $A \cup B = A \cup A = A$, ce qui montre que ces deux ensembles sont égaux.

Sens réciproque. Supposons $A \cap B = A \cup B$. Montrons que $A = B$ par double inclusion.

- On a $A \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq B$;

- ► On a $B \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq A$,

donc $A = B$.

(ii) On procède par double implication.

Sens direct. Supposons $B \subseteq C$.

- ► Montrons $A \cup B \subseteq A \cup C$. Soit $x \in A \cup B$. Distinguons deux cas.
  - Si $x \in A$, $x \in A \cup C$;
  - Si $x \in B$, l'inclusion $B \subseteq C$ entraîne que $x \in C$ et donc $x \in A \cup C$.

  Dans les deux cas, $x \in A \cup C$, donc on a bien montré $A \cup B \subseteq A \cup C$.
- ► Montrons $A \cap B \subseteq A \cap C$. Soit $x \in A \cap B$.
  - En particulier, $x \in A$.
  - Par ailleurs, $x \in B$, donc l'inclusion $B \subseteq C$ montre que $x \in C$.

  On a donc bien $x \in A \cap C$, ce qui prouve l'inclusion $A \cap B \subseteq A \cap C$.

Sens réciproque. Supposons $A \cup B \subseteq A \cup C$ et $A \cap B \subseteq A \cap C$. Montrons que $B \subseteq C$.

Soit donc $x \in B$. Distinguons deux cas.

- ► Si $x \in A$, on a $x \in A \cap B$. L'inclusion $A \cap B \subseteq A \cap C$ entraîne alors que $x \in A \cap C$, et donc que $x \in C$.
- ► Si $x \notin A$, on a quand même $x \in A \cup B$. L'inclusion $A \cup B \subseteq A \cup C$ entraîne alors $x \in A \cup C$, c'est-à-dire $(x \in A$ ou $x \in C)$. Comme $x \notin A$, on en déduit $x \in C$.

Dans tous les cas, $x \in C$, ce qui prouve que $B \subseteq C$.

(iii) On va utiliser la question précédente, et raisonner par équivalences.

On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} B = C &\Leftrightarrow B \subseteq C \text{ et } C \subseteq B \\ &\overset{\maltese}{\Leftrightarrow} (A \cup B \subseteq A \cup C \text{ et } A \cap B \subseteq A \cap C) \text{ et } (A \cup C \subseteq A \cup B \text{ et } A \cap C \subseteq A \cap B) \\ &\Leftrightarrow (A \cup B \subseteq A \cup C \text{ et } A \cup C \subseteq A \cup B) \text{ et } (A \cap B \subseteq A \cap C \text{ et } A \cap C \subseteq A \cap B) \\ &\Leftrightarrow (A \cup B = A \cup C) \text{ et } (A \cap B = A \cap C), \end{aligned}$$

l'équivalence surmontée d'une $\maltese$ provenant d'une application de la question précédente.

(iv) On procède par double implication.

Sens direct. Supposons $A \subseteq B \subseteq C$. On a alors $A \cup B = B$ et $B \cap C = B$, donc $A \cup B = B \cap C$.

Sens réciproque. Supposons $A \cup B = B \cap C$. Montrons successivement les deux inclusions.

- ► On a $A \subseteq A \cup B = B \cap C \subseteq B$.
- ► On a $B \subseteq A \cup B = B \cap C \subseteq C$.

(v) Montrons d'abord l'implication directe. Supposons donc $A \cap B = A \cap C$.

- ► Soit $x \in A \cap \overline{B}$. En particulier, $x \in A$. Montrons par l'absurde que $x \in \overline{C}$.

  Si ce n'était pas le cas, on aurait $x \in A$ et $x \in C$, donc $x \in A \cap C = A \cap B$, ce qui est en contradiction avec $x \in A \cap \overline{B}$ (car x ne pas pas appartenir simultanément à B et $\overline{B}$).

  On a donc $x \in \overline{C}$, donc $x \in A \cap \overline{C}$, ce qui achève la preuve que $A \cap \overline{B} \subseteq A \cap \overline{C}$.
- ► En échangeant les rôles de B et C dans la preuve précédente, on démontre l'inclusion réciproque $A \cap \overline{C} \subseteq A \cap \overline{B}$.

On a donc démontré l'implication $A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

En refaisant exactement la même preuve en remplaçant B par $\overline{B}$ d'une part, et C par $\overline{C}$ de l'autre, on obtient l'implication $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap \overline{\overline{C}}$. Comme $\overline{\overline{B}} = B$ et $\overline{\overline{C}} = C$, il s'agit de l'implication réciproque qu'il nous restait à démontrer.

(vi) On procède par double implication.

Sens direct. Supposons $A \subseteq B$. Soit $X \in \mathcal{P}(\Omega)$. On veut montrer $A \cap X \subseteq B \cap X$. Soit $x \in A \cap X$. On a en particulier $x \in X$. Par ailleurs, $x \in A$ donc l'inclusion $A \subseteq B$ entraîne que $x \in B$. On a donc bien $x \in B \cap X$, ce qui prouve l'inclusion $A \cap X \subseteq B \cap X$.

Sens réciproque. Supposons $\forall X \in \mathcal{P}(\Omega), A \cap X \subseteq B \cap X$.

En appliquant cette assertion à $X = \Omega$, on a $A = A \cap \Omega \subseteq B \cap \Omega = B$.