Applications

Exercice 7.

On pourra admettre que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 11.

La condition nécessaire et suffisante attendue pour l'injectivité de ψ est $X \cup Y = \Omega$.

Exercice 14.

On pourra effectuer une construction par récurrence en écrivant G comme une union d'ensembles finis G_n inclus les uns dans les autres tels que la restriction de δ à G_n^2 soit toujours injective, mais que l'image de cette restriction contienne de plus en plus d'entiers.

Exercice 17.

La question sur la parité est un (petit) piège. Commencer par tenter de dessiner un graphe de fonction paire bijective...

Exercice 35.

On pourra se convaincre que $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à tous les $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, alors que $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à une infinité de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cela permettra, notamment pour les deux exemples, de formuler des conjectures que l'on démontrera à l'aide des canevas de preuve standard.

Exercice 36.

On pourra montrer l'inclusion réciproque par contraposée (qu'est-ce que cela signifie, au juste ?).

Autocorrection

Autocorrection A.

1. Supposons $g \circ f$ surjective et g injective.

   Soit $y \in F$.

   Comme $g \circ f$ est surjective, on peut trouver $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = g(y)$. Comme g est injective, on a $f(x) = y$.
2. Supposons $g \circ f$ injective et que f surjective.

   Soit $y, y' \in F$ tel que $g(y) = g(y')$.

   Comme f est surjective, on peut trouver $x, x' \in E$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. On a donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, donc $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$.

Autocorrection B.

1. ► Montrons que l'application f est injective.

   Soit $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $f(x) = f(x')$.

   On a donc $2x = 2x'$. En divisant de part et d'autre par 2, on a bien $x = x'$.

   ► En revanche, f n'est pas surjective. En effet, quel que soit $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$ est un entier pair, donc $1 \in \mathbb{N}$ n'est pas une valeur prise par la fonction f.

2. ► L'application g n'est pas injective. En effet, $g(2) = g(1) = 1$.

   ► Montrons que l'application g est surjective. Soit $y \in \mathbb{N}$.

   (i) Si y est impair, on a $g(y) = y$.

   (ii) Si y est pair, on a $g(2y) = y$.

   Dans tous les cas, on a $\exists x \in \mathbb{N} : g(x) = y$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   ► On a $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n) = n$ car $2n$ est pair. Ainsi, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

   Cette application est bijective.

   ► Si n est pair, $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f\left(\frac{n}{2}\right) = n$.

   Si n est impair, $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n) = 2n$.

   Ainsi, on a

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{cases}$$

   Cette application n'est ni injective ni surjective. On peut le voir de deux façons.

   (i) Si $f \circ g$ était injective, g serait injective. Si $f \circ g$ était surjective, f serait surjective. Comme on a vu aux deux premières questions qu'il n'en était rien, $f \circ g$ n'est ni injective ni surjective.

   (ii) Montrons les mêmes résultats à la main.

   Déjà, l'expression de $f \circ g$ montre que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $(f \circ g)(n)$ est pair. On ne peut donc pas trouver de $n \in \mathbb{N}$ tel que $(f \circ g)(n) = 1$. Ainsi, $f \circ g$ n'est pas surjective.

   Par ailleurs, $(f \circ g)(1) = (f \circ g)(2) = 2$, donc $f \circ g$ n'est pas injective.

Autocorrection C.

1. L'application f est injective. Pour le montrer, nous allons montrer

$$\forall x, x' \in \mathbb{N}, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

   par contraposée, c'est-à-dire que nous allons montrer

$$\forall x, x' \in \mathbb{N}, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

   Soit $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $x \neq x'$.

   ► Si $x > x'$, la stricte croissance de f entraîne $f(x) > f(x')$.

   ► Si $x' > x$, la stricte croissance de f entraîne $f(x') > f(x)$.

   Dans tous les cas, nous avons bien $f(x) \neq f(x')$.

   Remarque. Nous avons en fait démontré un résultat plus général, à savoir que toute application strictement croissante est injective.

En revanche, f n'est pas surjective. En effet, on a $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $\forall n \geqslant 2, f(n) \geqslant 4$, donc il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 3$.

2. D'après ce qui précède, il n'existe pas d'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. En effet, puisque $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ est surjectif, cela entraînerait la surjectivité de f, que nous avons exclue.

   Par ailleurs, considérons

$$h : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n \text{ est un carré parfait} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

   Il s'agit d'une application bien définie ($\sqrt{n}$ est bien un élément de $\mathbb{N}$ dès que n est un carré parfait). La composée $h \circ f$ est alors bien une application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} (h \circ f)(n) &= h(f(n)) \\ &= h(n^2) \\ &= \sqrt{n^2} && \text{car } n^2 \text{ est un carré parfait} \\ &= n && \text{car } n \geqslant 0. \end{aligned}$$

   Ainsi, on a bien $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Autocorrection D.

1. On a
   - $\sin[\mathbb{R}] = [-1, 1]$;
   - $\sin[\mathbb{R}_+] = [-1, 1]$;
   - $\sin\Big[[0, 2\pi]\Big] = [-1, 1]$;
   - $\sin\Big[[-\pi, \pi]\Big] = [-1, 1]$;
   - $\sin\Big[[0, \pi/2]\Big] = [0, 1]$;
   - $\sin\Big[[-\pi, \pi/2]\Big] = [-1, 1]$.

2. On a
   - $\sin^{-1}\Big[[-1, 1]\Big] = \mathbb{R}$;
   - $\sin^{-1}\Big[[0, 1]\Big] = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [0 + k\,2\pi, \pi + k\,2\pi]$;
   - $\sin^{-1}\Big[[3, 4]\Big] = \varnothing$;
   - $\sin^{-1}[\mathbb{R}] = \mathbb{R}$;
   - $\sin^{-1}[\{1\}] = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + k\,2\pi\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\,2\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
   - $\sin^{-1}[\{-1, 1\}] = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{-\frac{\pi}{2} + k\,2\pi, \frac{\pi}{2} + k\,2\pi\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Autocorrection E.

1. Les deux termes de l'égalité sont des parties de $\mathbb{R}$. Montrons qu'elles sont égales par double inclusion.

   - Soit $y \in \bigcup_{x \in [0,1]}]x - 1, x + 1[$.

     On peut trouver $x \in [0, 1]$ tel que $y \in]x - 1, x + 1[$.

     On a alors

- d'une part : $y < x + 1 \leqslant 2$;
- de l'autre : $y > x - 1 \geqslant -1$,

donc $y \in]-1, 2[$.

► Réciproquement, soit $y \in]-1, 2[$.

On distingue deux cas :

- si $y \in]-1, 1[$, on a $y \in]0 - 1, 0 + 1[$, donc $y \in \bigcup_{x \in [0,1]}]x - 1, x + 1[$;
- si $y \in]0, 2[$, on a $y \in]1 - 1, 1 + 1[$, donc $y \in \bigcup_{x \in [0,1]}]x - 1, x + 1[$.

Comme ces deux cas recouvrent toutes les possibilités (car $]-1, 1[\cup]0, 2[=]-1, 2[$), on a montré l'inclusion réciproque, ce qui conclut la preuve.

2. On procède de la même façon pour montrer que $\bigcap_{x \in [0,1]}]x - 1, x + 1[=]0, 1[$.

► Soit $y \in \bigcap_{x \in [0,1]}]x - 1, x + 1[$.

On a donc en particulier $y \in]0 - 1, 0 + 1[=]-1, 1[$ et $y \in]1 - 1, 1 + 1[=]0, 2[$. Cela entraîne à la fois $0 < y$ et $y < 1$, donc $y \in]0, 1[$.

► Réciproquement, soit $y \in]0, 1[$.

Montrons $y \in \bigcap_{x \in [0,1]}]x - 1, x + 1[$, c'est-à-dire $\forall x \in [0, 1], y \in]x - 1, x + 1[$.

Soit $x \in [0, 1]$.

- On a $x \leqslant 1$, donc $x - 1 \leqslant 0$, donc $y > x - 1$.
- De même, on a $x \geqslant 0$, donc $x + 1 \geqslant 1$, donc $y < x + 1$.

Ainsi, $y \in]x - 1, x + 1[$.

Cela montre $y \in \bigcap_{x \in [0,1]}]x - 1, x + 1[$ et conclut la preuve.

Autocorrection F.

1. Comme dans les propriétés du cours, on peut traiter celles de l'image réciproque par chaîne d'égalités d'ensembles, car la définition de l'image réciproque est la plus simple du point de vue logique.

   (a) On a

$$\begin{aligned} f^{-1}\left[\bigcup_{i \in I} B_i\right] &= \left\{ x \in E \,\middle|\, f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i \right\} \\ &= \left\{ x \in E \,\middle|\, \exists i \in I : f(x) \in B_i \right\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \left\{ x \in E \,\middle|\, f(x) \in B_i \right\} \\ &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]. \end{aligned}$$

   (b) Exactement de la même façon, on a

$$f^{-1}\left[\bigcap_{i \in I} B_i\right] = \left\{ x \in E \,\middle|\, f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{x \in E \,\middle|\, \forall i \in I, f(x) \in B_i\right\} \\
&= \bigcap_{i \in I} \left\{x \in E \,\middle|\, f(x) \in B_i\right\} \\
&= \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i].
\end{aligned}
$$

2. (a) On procède par double inclusion.

Sens direct. Soit $y \in f\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right]$. On peut donc trouver $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. On peut alors trouver un indice $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$.

Comme $y = f(x)$, cela montre $y \in f[A_{i_0}]$. Ainsi, $y \cup \bigcup_{i \in I} f[A_i]$.

Sens réciproque. Soit $y \in \bigcup_{i \in I} f[A_i]$. On peut donc trouver $i_0 \in I$ tel que $y \in f[A_{i_0}]$. On peut donc trouver $x \in A_{i_0}$ tel que $y = f(x)$.

Comme $x \in A_{i_0}$, on a $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Comme $y = f(x)$, on en déduit $y \in f\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right]$.

(b) Soit $y \in f\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right]$. On peut donc trouver $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ tel que $y = f(x)$.

Montrons $y \in \bigcap_{i \in I} f[A_i]$, c'est-à-dire $\forall i \in I, y \in f[A_i]$. Soit $i_0 \in I$.

Comme $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, on a notamment $x \in A_{i_0}$. Comme $y = f(x)$, on en déduit $y \in f[A_{i_0}]$, ce qui conclut.

Autocorrection G.

- On procède par double inclusion.

Sens direct. Soit $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B$.

Comme $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, on peut trouver $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$.

Comme en outre $x \in B$, on en déduit $x \in A_{i_0} \cap B$.

Cela montre que $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$.

Sens réciproque. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$.

On peut donc trouver $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0} \cap B$.

Comme $x \in A_{i_0}$, on a $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Comme en outre $x \in B$, on en déduit $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B$.

- Proposons deux méthodes.

Par double inclusion.

Sens direct. Soit $x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B$.

Montrons $x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$, c'est-à-dire $\forall i \in I, x \in A_i \cup B$.

Soit $i \in I$. Comme $x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B$, on distingue deux cas.

- Si $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, on a notamment $x \in A_i$. En particulier, $x \in A_i \cup B$.
- Si $x \in B$, on a évidemment $x \in A_i \cup B$.

Cela conclut.

Sens réciproque. Soit $x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$.

Montrons $x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B$, c'est-à-dire $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ ou $x \in B$. On va en fait montrer l'assertion équivalente $x \notin B \Rightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

Supposons donc $x \notin B$ et montrons $\forall i \in I, x \in A_i$. Soit $i \in I$.

On sait notamment que $x \in A_i \cup B$. Comme en outre $x \notin B$, on a bien $x \in A_i$, ce qui conclut.

Par la loi de De Morgan. On peut obtenir directement le résultat demandé en utilisant la première partie de la question, grâce à la loi de De Morgan. On note simplement $\overline{\cdot}$ le passage au complémentaire : pour une partie X de Ω, on note $\overline{X} = \Omega \setminus X$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B} &= \overline{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)} \cap \overline{B} && \text{(De Morgan)}\\
&= \left(\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}\right) \cap \overline{B} && \text{(De Morgan)}\\
&= \bigcup_{i\in I}(\overline{A_i} \cap \overline{B}) && \text{(question précédente)}\\
&= \bigcup_{i\in I}(\overline{A_i \cup B}) && \text{(De Morgan)}\\
&= \overline{\bigcap_{i\in I}(A_i \cap B)} && \text{(De Morgan).}
\end{aligned}$$

On obtient alors l'égalité de l'énoncé en passant au complémentaire de part et d'autre.