

Calculus

Fonctions usuelles Exponentielle et logarithme

Autocorrection A.



Déterminer pour quels valeurs de x l'expression $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$ a un sens, et simplifier l'expression.

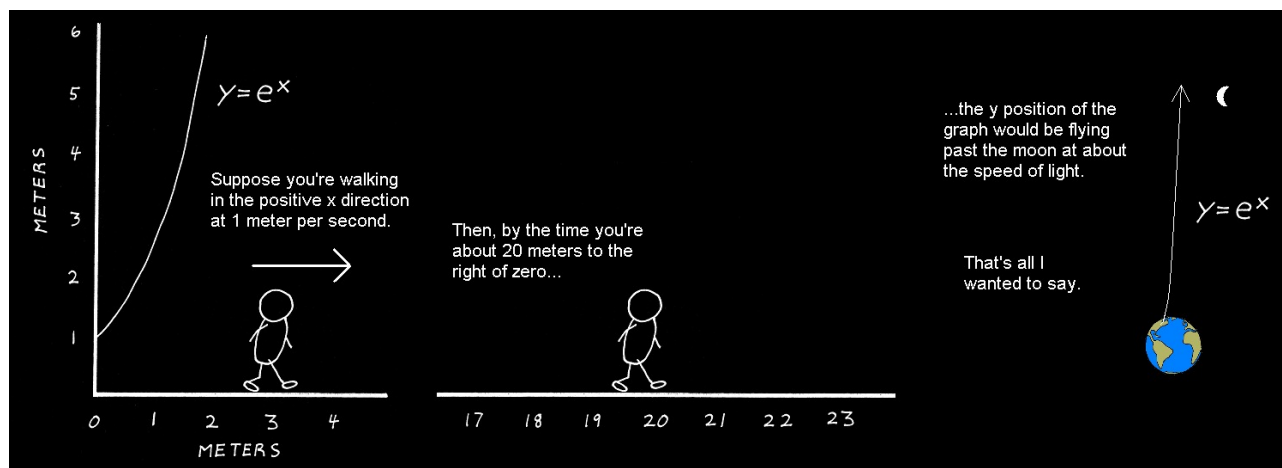
Autocorrection B.



Résoudre l'équation $x^x = x^2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1.

Justifier ce strip du webcomic *Abstruse Goose* (<http://abstrusegoose.com/218>).



Exercice 2.

Trouver tous les $a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, a^x \geq x + 1$.

Exercice 3.



Le plus grand nombre premier connu est $2^{136\,279\,841} - 1$ (il a été découvert le 21 octobre 2024 par le projet *Great Internet Mersenne Prime Search*). Combien y a-t-il de chiffres dans son écriture décimale ?

Exercice 4.



Existe-t-il un entier n tel que $30^{4^{1777}}$ et 2^n aient le même nombre de chiffres ?

Exercice 5.

Résoudre l'équation $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$.

Exercice 6⁺. _____ 

Résoudre les deux systèmes suivants (a désigne un paramètre réel).

(i)
$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$$

(ii)
$$\begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

Exercice 7⁺. _____

Déterminer les couples $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que
$$\begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = \ln 2 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Exercice 8. _____

Déterminer les $x \in]1, +\infty[$ tels que $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2 \ln x - 1$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 9. _____

1. Soit x et $y \in \mathbb{R}$. Montrer

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y.$$

2. (a) Donner une formule pour $\operatorname{th}(x+y)$.

(b) Montrer $\forall a, b \in]-1, 1[, \frac{a+b}{1+ab} \in]-1, 1[$.

Exercice 10. _____

Montrer $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^p = \operatorname{ch}(px) + \operatorname{sh}(px)$.

Exercice 11. _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $2^n \prod_{k=1}^n \operatorname{ch} \frac{x}{2^k}$.

Exercice 12. _____ 

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = 0$.

Exercice 13. _____ 

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(x+ky)$ et $\sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(x+ky)$.

Fonctions trigonométriques

Exercice 14. _____

Soit p et q deux réels.

1. À quelle condition a-t-on $\sin p + \sin q \neq 0$?

2. Si la condition de la question précédente est remplie, simplifier $\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$.

3. En déduire $\tan \frac{\pi}{24}$.

Exercice 15. ✓

Montrer que le graphe de arccos possède un centre de symétrie.

Exercice 16. ✓

Montrer les formules suivantes :

- ▶ $\frac{\pi}{2} = 2 \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{4}{7} + \arctan \frac{1}{8}$ (Newton, 1676);
- ▶ $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$ (Machin, 1706);
- ▶ $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$ (Schulz von Strassnitzky, 1844).

Exercice 17. ✓

1. Montrer que $\arctan(2\sqrt{2}) + 2 \arctan(\sqrt{2}) = \pi$.
2. En déduire la valeur de $\arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Études de fonctions

Autocorrection C. ✓

Pour chacune des expressions suivantes, dire pour quelles valeurs de x elle a un sens. On obtient ainsi une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, pour une certaine partie $D \subseteq \mathbb{R}$. Préciser un ensemble D' de points où f est dérivable, et la dériver. (On désigne par a, b , des nombres réels > 0 fixés une fois pour toutes).

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\exp(-a/x^2)$; | (q) $\arcsin(\tan x)$; | (ι) $\frac{\cos(2x)}{x^2 - 2}$; |
| (b) $\frac{\cos(ax^2 + bx + 1)}{\sin x}$; | (r) $\operatorname{sh} x \sin x$; | (κ) $\ln(\cos(2x))$; |
| (c) $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$; | (s) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$; | (λ) $\frac{ x \sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$; |
| (d) $\sqrt{1 + \cos^2 x}$; | (t) $\ln(1 + \operatorname{ch} x)$; | (μ) $\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$; |
| (e) $(ax + b)^x$; | (u) x^x ; | (ν) $\ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; |
| (f) $x - a\sqrt{x}$; | (v) $\cos(x) \ln(1 + x)$; | (ξ) $\ln(\ln x)$; |
| (g) $\arctan(e^x)$; | (w) $\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$; | (o) $\ln(\ln(\ln x))$; |
| (h) $\arcsin(x^2 - 1)$; | (x) $\arctan(\operatorname{ch}(x))$; | (π) $\sin x \sin \frac{1}{x}$; |
| (i) $\arccos\left(\frac{1}{1+x}\right)$; | (y) $\frac{1}{\operatorname{sh}(\arcsin(x))}$; | (ρ) $\sqrt{1 + x^2 \sin^2 x}$; |
| (j) $\arctan \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$; | (z) $\frac{\sin x}{(\cos x + 2)^4}$. | (σ) $\ln\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$; |
| (k) $\frac{\cos^3 x}{(1 - \cos x)^2}$; | (α) $\ln(\arctan x)$; | (τ) $e^{\cos x}$; |
| (l) $\sin\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$; | (β) $(\operatorname{ch} x)^x$; | (υ) $\frac{x}{x^2 + 1}$; |
| (m) $\frac{x+1}{\sin(2x)}$; | (γ) $x^3 \cos(5x + 1)$; | (φ) $\arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$; |
| (n) $\sin((2x + 5)^2)$; | (δ) $\frac{1}{\sin(x^2)}$; | (χ) $\frac{x}{\sin x}$; |
| (o) $\arccos\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; | (ε) $\ln(e^x + 1)$; | (ψ) $\ln(\arcsin(x^2))$; |
| (p) $\sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{6}}$; | (ζ) $e^{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}$; | (ω) $\ln(e^x + \sin x)$. |
| | (η) $\exp\left(\sqrt{x^2 + x + 1}\right)$; | |
| | (θ) $\frac{\exp(1/x) + 1}{\exp(1/x) - 1}$; | |

Exercice 18. _____ 

Étudier, selon le plan vu en cours, les fonctions définies par les expressions suivantes.

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| (i) $\frac{x^3}{x^2-3}$; | (iii) $\sqrt{\frac{\ln x }{x}}$; | (v) $x \arctan \frac{1}{x}$; |
| (ii) $\ln(x^2-1)$; | (iv) $\frac{\tan 2x}{\tan x}$; | (vi) $\sin(3x) + 3 \sin x$. |

Exercice 19⁺. _____ 

Soit $W : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction, que l'on ne suppose pas dérivable *a priori*. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, W(x) e^{W(x)} = x.$$

Déterminer les variations de W .

Identités

Exercice 20⁺. _____  

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, a e^{2x} + b e^x + c = e^{2x} + 2e^x - 1$.
Peut-on en déduire $a = 1, b = 2$ et $c = -1$?
2. Même question avec l'égalité $\forall x \in [-1, 1], a \arccos x + b \arcsin x + c = \arccos x + 2 \arcsin x - 1$.

Exercice 21. _____  

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\arctan(\operatorname{sh} x) + \arccos(\operatorname{th} x)$.
2. Résoudre l'équation $\operatorname{th} x = \frac{5}{13}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire l'égalité $\arctan \frac{5}{12} + \arccos \frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 22. _____

1. Soit a et b deux réels tels que $ab \neq 1$. Simplifier $\arctan a + \arctan b - \arctan \frac{a+b}{1-ab}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\arctan \frac{1+x}{1-x}$.

Exercice 23. _____

1. Montrer, à l'aide d'une étude de fonctions, que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
2. Démontrer le même résultat à l'aide de trigonométrie élémentaire.

Exercice 24. _____ 

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\arctan(x+1) - \arctan x$.
2. Soit $n \geq 1$. Déduire de ce qui précède une expression de $S_n = \sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1}$.
3. Que dire de S_n quand $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 25.

Dire pour quels $x \in \mathbb{R}$ les expressions suivantes ont un sens, puis simplifier.

- | | |
|---|-----------------------------|
| (i) $\frac{1 + \sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 - \sin x};$ | (vi) $\cos(\arctan x);$ |
| (ii) $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x};$ | (vii) $\cos(2 \arccos x);$ |
| (iii) $\frac{1 - 2 \cos x - 3 \cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1 - 3 \cos x}{1 - \cos x};$ | (viii) $\cos(2 \arcsin x);$ |
| (iv) $\tan(\arcsin x);$ | (ix) $\sin(2 \arccos x);$ |
| (v) $\sin(\arccos x);$ | (x) $\cos(2 \arctan x);$ |
| | (xi) $\sin(2 \arctan x);$ |
| | (xii) $\tan(2 \arcsin x).$ |

Inégalités**Exercice 26.**

Montrer les inégalités suivantes.

- | | |
|---|--|
| (i) $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2;$ | (iii) $\forall x \in [0, 2], \frac{1}{3} \leq \frac{x+1}{x^2+3} \leq \frac{1}{2};$ |
| (ii) $\forall x \in]0, 4[\setminus \{1\}, \left \frac{x+2}{1-x} \right \geq 2;$ | (iv) $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{6} \leq \frac{x+1}{x^2+3} \leq \frac{1}{2}.$ |

Exercice 27.

Montrer les inégalités suivantes.

- | | |
|--|---|
| (i) $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x;$ | (iv) $\forall x \geq 0, (x-2)e^x + (x+2) \geq 0;$ |
| (ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \frac{x+1}{x-1} \ln x \geq 2;$ | (v) $\forall n \geq 2, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$ |
| (iii) $\forall x > 0, x \ln x - (x-1) \leq (x-1)^2;$ | |

Exercice 28.

Montrer les inégalités suivantes.

- | | |
|---|---|
| (i) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \leq x ;$ | (iii) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2};$ |
| (ii) $\forall x \in [-1, 1], \arcsin x \geq x ;$ | (iv) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan x \geq x .$ |

Exercice 29 (Inégalité de Huygens).

Montrer $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x \leq \frac{2}{3} \sin(x) + \frac{1}{3} \tan(x).$

Exercice 30⁺ (Inégalité de Mitrinović-Adamović).

Montrer $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \cos(x) < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3.$

Exercice 31.

Montrer $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$.

Exercice 32⁺.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ de cardinal 13. Montrer qu'il existe $a, b \in A$ tels que

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} \leq 2 - \sqrt{3}.$$

Équations**Exercice 33.**

1. Montrer que l'équation $x \ln x = 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x} \end{cases}$ possède un unique point fixe.
3. Montrer que l'équation $e^{-x^2} = e^x - 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 34.

Résoudre l'équation $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$.

Exercice 35.

Résoudre les équations suivantes.

- | | |
|---|---|
| (i) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$; | (iv) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$; |
| (ii) $\cos 4x + \sin 4x = 1$; | (v) $3 \cos x - 3 \sin x = 6$; |
| (iii) $\sin x + \sin 3x = 0$; | (vi) $2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos 2x = 0$. |

Exercice 36.

Résoudre l'équation $\tan x \tan 2x = 1$.

Exercice 37.

Résoudre les équations suivantes.

- | | |
|---|--|
| (i) $\arcsin 2x = \arccos x$; | (iv) $\arcsin x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}$; |
| (ii) $\arcsin(x+1) - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$; | (v) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{3}$; |
| (iii) $\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$; | (vi) $\arcsin x = \arctan 2 + \arctan 3$. |

Dérivées supérieures

Exercice 38. ✓

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la dérivée n -ième des applications suivantes.

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| (i) $x \mapsto \cos(3x)$; | (iv) $x \mapsto x^\alpha$; | (vii) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$; |
| (ii) $x \mapsto x^5 e^{3x}$; | (v) $x \mapsto x^2 \sin x$; | |
| (iii) $x \mapsto e^x \cos x$; | (vi) $x \mapsto \cos^3 x$; | (viii) $x \mapsto x^{n-1} \ln(1+x)$. |

Exercice 39. 💡

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n -ième de la fonction $f_n : x \mapsto x^{n-1} e^{1/x}$.

Exercice 40⁺. 💡

On note $f = \arctan$ pour simplifier.

1. Montrer que f est lisse et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2} + f(x)\right)\right).$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des points d'annulation de $f^{(n)}$.

Exercice 41⁺. _____

Montrer que la fonction $\tan$ est lisse et *absolument monotone* sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \tan^{(n)}(x) \geq 0.$$

Exercice 42⁺. _____

1. Montrer que la fonction $\arcsin$ est trois fois dérivable sur $] -1, 1[$ et calculer $f = \frac{\arcsin''}{\arcsin'}$.

On exprimera le résultat sous la forme d'une fonction $x \mapsto \frac{\alpha}{x + \beta} + \frac{\gamma}{x + \delta}$.

On dit qu'une fonction est *absolument monotone* sur un intervalle si elle y est lisse, et que toutes ses dérivées y sont ≥ 0 .

2. Montrer que f est absolument monotone sur $[0, 1[$.
3. En déduire que $\arcsin$ est absolument monotone sur $[0, 1[$.

Exercice 43. ✓

En calculant de deux façons la dérivée n -ième de $x \mapsto x^{2n}$, retrouver l'expression de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 44⁺. _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes la dérivée n -ième de $x \mapsto x^n \ln(x)$, montrer

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Introduction aux développements limités

Calcul

Autocorrection D.



Déterminer les développements limités suivants.

- | | |
|--|---|
| (i) $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x \sqrt[3]{1+x}$; | (x) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (\cos x)^{1/x}$; |
| (ii) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sin(x) \ln(1+x)$; | (xi) $DL_{100}(2)$ de $x \mapsto x^4$; |
| (iii) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$; | (xii) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \sqrt{x}$; |
| (iv) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (e^x - 1) \sin x$; | (xiii) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$; |
| (v) $DL_2(0)$ de $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$; | (xiv) $DL_3(1)$ de $\exp$; |
| (vi) $DL_2(0)$ de $x \mapsto e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}}$; | (xv) $DL_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $x \mapsto \sin(x) \cos(3x)$; |
| (vii) $DL_8(0)$ de $x \mapsto (\sin x)^4$; | (xvi) $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $x \mapsto \sqrt{\tan x}$; |
| (viii) $DL_6(0)$ de $x \mapsto \tan x$; | (xvii) $DL_3(1)$ de $x \mapsto \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$. |
| (ix) $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{2x+1}$; | |

Exercice 45.

- À l'aide de la méthode générale de calcul des DL, déterminer un $DL_8(0)$ de $\tan$.
- Retrouver ce $DL_8(0)$ à l'aide du théorème de Taylor-Young.

Pourquoi est-ce ici une idée raisonnable?

Exercice 46.



- Donner le $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{1/x}$.
- Donner le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

Exercice 47.



- Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^{x^2} \end{cases}$.
 - Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
 - Montrer que sa réciproque f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 de la forme

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5).$$

- En utilisant l'égalité $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$, déterminer a , b et c .
- Suivre le même schéma pour obtenir un $DL_3(0)$ de la réciproque de $x \mapsto 2x + \sin x$.

Exercice 48.



Soit $f : x \mapsto \arctan \frac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}$. En commençant par calculer f' , déterminer le $DL_4(0)$ de f .

Exercice 49.

Donner le $DL_{12}(0)$ de $x \mapsto \ln \left(\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!} \right)$.

Exercice 50.

Une fonction paire telle que $f(x) = 1 + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ vérifie-t-elle $f(x) = 1 + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$?

Applications**Autocorrection E.**

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des fonctions suivantes, au voisinage du point donné. On précisera la limite dans le cas convergent.

(i) $x \mapsto \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{\tan x - x}$ (en 0);

(iv) $x \mapsto \frac{x - \arctan x}{\sin^3 x}$ (en 0);

(ii) $x \mapsto \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)}$ (en 1);

(v) $x \mapsto \frac{x^3 + 7x^2 - 8}{x^4 + x^3 - 2}$ (en 1);

(iii) $x \mapsto \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}$ (en 0);

(vi) $x \mapsto (\cos x)^{\ln|x|}$ (en 0).

Exercice 51.

Soit $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ impaires telles que $f'(0) = g'(0) = 1$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x)) - g(f(x))}{x^6}$.

Exercice 52.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $f = \sin^n$. Calculer, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)}(0)$.

Exercice 53⁺.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes le $DL_n(0)$ de $x \mapsto (e^x - 1)^n$, calculer, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la somme

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

Exercice 54⁺.

Soit $f : x \mapsto \ln \left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \right)$. Montrer que $f^{(1789)}(0) = 0$.