

---

## Sommes et produits

---

### Généralités

#### Autocorrection A.



On considère deux suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(S_n)_{n \geq 0}$  reliées par la relation

$$\forall n \geq 0, S_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $a_n$  en fonction des valeurs de la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer à l'aide des valeurs de la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  les sommes suivantes :

$$(i) \sum_{k=0}^{n+1} a_k; \quad (ii) \sum_{k=n+1}^{2n} a_k; \quad (iii) \sum_{k=0}^n 2a_k; \quad (iv) \sum_{k=0}^n (a_k - 1); \quad (v) \sum_{k=0}^n (a_k - k).$$

#### Exercice 1.



Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer les sommes suivantes.

$$(i) \sum_{k=0}^n (-1)^k; \quad (iii) \sum_{k=1}^n 2k; \quad (v) \sum_{k=0}^n 2^k; \quad (vii) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k;$$

$$(ii) \sum_{k=2}^{n+1} k; \quad (iv) \sum_{k=n+1}^{2n} 2k; \quad (vi) \sum_{k=n+1}^{2n} 2^k; \quad (viii) \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}.$$

#### Exercice 2.



En fonction de  $n \in \mathbb{N}$ , calculer la somme  $1 + i + i^2 + \dots + i^n$  et le produit  $i \cdot i^2 \cdot i^3 \dots i^n$ .

#### Exercice 3.

Soit  $n \geq 1$ . Calculer  $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^3$ .

#### Exercice 4.

Montrer les identités suivantes.

$$(i) \forall n \geq 1, \prod_{k=1}^n (4k - 2) = \prod_{k=1}^n (n + k);$$

$$(ii) \forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

#### Exercice 5.

Soit  $n \geq 1$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des nombres réels. Pour quel  $\xi \in \mathbb{R}$  a-t-on  $\sum_{k=1}^n (x_k - \xi) = 0$  ?

**Exercice 6.** ✓

Soit  $n > 1$  un entier. Évaluer sans calcul  $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2\pi \frac{k}{n}\right)$ .

**Exercice 7<sup>+</sup>.** 💡

Soit  $n \geq 1$  et  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{e^{i\theta_k}}{2^k} \neq 0$ .

**Exercice 8<sup>+</sup>.** \_\_\_\_\_

Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite d'entiers naturels (c'est-à-dire un élément de  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ). On définit la fonction

$$S : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \sum_{k=0}^n a_k. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $(a_n)_{n \geq 0}$  pour que la fonction  $f$  soit injective (resp. surjective, bijective).

**Exercice 9.** 💡 ✓

Calculer  $\sum_{p=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ ,  $\sum_{k=0}^n k k!$  et  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$ .

**Exercice 10.** ✓

Utiliser la somme télescopique  $(n+1)^4 = \sum_{k=0}^n [(k+1)^4 - k^4]$  pour obtenir une formule pour  $\sum_{k=0}^n k^3$ .

**Exercice 11.** \_\_\_\_\_

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\frac{2^n x}{\pi} \notin \mathbb{Z}$ . Montrer  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin(2^k x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(2^n x)}{\sin(2^n x)}$ .

**Exercice 12.** ✓

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Donner des expressions simples pour les produits suivants.

- |  |                                 |   |                                     |
|--|---------------------------------|---|-------------------------------------|
| (i) $\prod_{k=-1000}^{1000} (n^2 - n)$ ; | (iv) $\prod_{k=n+1}^{2n} k^2$ ; | (vii) $\prod_{k=0}^n 2^k$ ;                           | (x) $\prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k}$ ; |
| (ii) $\prod_{k=1}^n (2k)$ ;              | (v) $\prod_{k=1}^n (2k+1)$ ;    | (viii) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ ; | (xi) $\prod_{k=1}^n (4k^2 - 1)$ ;   |
| (iii) $\prod_{k=1}^n k^2$ ;              | (vi) $\prod_{k=0}^n e^{-k}$ ;   | (ix) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ ; | (xii) $\prod_{k=1}^n (k(n+1-k))$ .  |

**Exercice 13.** \_\_\_\_\_

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de réels strictement positifs. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (u_1 u_2 \cdots u_k)^n \leq (u_1 u_2 \cdots u_n)^k.$$

**Exercice 14<sup>++</sup>.** 💡

Montrer par récurrence  $\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (2k+1)^3}{(2k+1)^4 + 4} = (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 + 1}$ .

## Somme géométrique

### Autocorrection B.



Soit  $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $\sum_{k=0}^n \cos(\varphi + k\theta)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(\varphi + k\theta)$ .

### Exercice 15.



Étant donné une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs strictement positives, on note  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Pour tout  $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ , construire une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

### Exercice 16.

Montrer  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in ]1, +\infty[$ ,  $\frac{a^n - 1}{a - 1} \leq n a^{n-1}$ .

### Exercice 17<sup>+</sup>.



Le but de cet exercice est de déterminer, de trois façons différentes, la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n k q^k,$$

pour un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et un réel  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

1. Exprimer de deux façons différentes  $S_{n+1}$  en fonction de  $S_n$ , et en déduire la valeur de  $S_n$ .
2. Calculer  $(q - 1)S_n$  et en déduire la valeur de  $S_n$ .
3. On considère la fonction

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^n x^k. \end{aligned}$$

Donner une formule pour la dérivée  $\sigma'$ , et en déduire la valeur de  $S_n$ .

### Exercice 18.



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin^2(k\theta)$ .

### Exercice 19.



Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ . Montrer que  $\left| \frac{1 - z^n}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$ .

### Exercice 20.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2kx)$  et  $\sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)x)$ .
2. En déduire  $\cos^2 \frac{\pi}{14} + \cos^2 \frac{3\pi}{14} + \cos^2 \frac{5\pi}{14}$ .

## Coefficients binomiaux, binôme de Newton

### Autocorrection C.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2^k}, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n 2^{2k} \binom{n}{k}.$$

### Exercice 21.

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$  est un entier.

### Exercice 22.

Soit  $n \geq 1$ . Montrer que  $\sum_{\substack{k \in [0, n] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k \in [0, n] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$ . Combien vaut cette somme?

### Exercice 23.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos k\theta$  et  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin k\theta$ .

### Exercice 24<sup>+</sup>.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose

$$S_0 = \sum_{p=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3p}, \quad S_1 = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} \binom{n}{3p+1}, \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-2)/3 \rfloor} \binom{n}{3p+2}.$$

À l'aide des développements de  $(1+1)^n$ ,  $(1+j)^n$  et  $(1+\bar{j})^n$ , déterminer  $S_0$ ,  $S_1$  et  $S_2$ .

### Exercice 25<sup>+</sup>.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $\sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$ .

### Exercice 26.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer

$$\forall p \in [0, n], \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p} \quad \text{et} \quad \forall p \in [1, n], \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 0.$$

### Exercice 27.

On rappelle que les nombres de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 1}$  sont définis par

$$F_1 = F_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = F_{n+1}.$$

**Exercice 28<sup>+</sup>**.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} (-1)^k$ .

**Exercice 29<sup>+</sup>**.

1. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $2 \binom{2p+1}{p+1} = \binom{2p+2}{p+1}$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k}$ .

Montrer  $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = 2S_n$ , et en déduire l'expression de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 30 (Unimodalité des coefficients binomiaux)**.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le sens de variation de la famille  $\left( \binom{n}{k} \right)_{k=0}^n$ .

2. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}$ .

**Exercice 31**.

Soit  $k \geq 1$  un entier. Montrer que le produit de  $k$  entiers consécutifs est toujours divisible par  $k!$ .

**Exercice 32 (Formule d'absorption et conséquences)**.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. **Formule d'absorption.** Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que  $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ .

2. En déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ , de  $\sum_{k=0}^n k 2^k \binom{n}{k}$  et de  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ .

**Exercice 33**.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. En dérivant de deux façons différentes la fonction  $x \mapsto (x+1)^n$ , trouver la valeur de  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ .

2. Par une méthode analogue, calculer  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$ .

**Exercice 34<sup>+</sup> (Somme de l'indice du haut, et conséquences)**.

1. Soit  $n$  et  $p$  des entiers tels que  $n \geq p \geq 0$ . Montrer la *formule de sommation de l'indice du haut* :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. Soit  $n \geq 1$ . Déduire de ce qui précède  $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$  et  $\sum_{k=0}^n k^3$ .

## Sommes doubles, produits doubles

### Calcul

#### Exercice 35.



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer les sommes suivantes.

$$(i) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1;$$

$$(vi) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij;$$

$$(xi) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j};$$

$$(ii) \sum_{1 \leq i, j \leq n} i;$$

$$(vii) \sum_{1 \leq i, j \leq n} (j - i);$$

$$(xii) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j};$$

$$(iii) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i;$$

$$(viii) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j - i);$$

$$(xiii) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j);$$

$$(iv) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j);$$

$$(ix) \sum_{1 \leq i, j \leq n} |j - i|;$$

$$(xiv) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j);$$

$$(v) \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)^2;$$

$$(x) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i};$$

$$(xv) \sum_{1 \leq i, j \leq n} 3^{i+j}.$$

#### Exercice 36.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Donner une expression simple pour les produits suivants.

$$(i) \prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j};$$

$$(ii) \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij;$$

$$(iii) \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij.$$

#### Exercice 37<sup>+</sup>.

Soit  $n \geq 1$ . Calculer  $\sum_{(i,j,k) \in [1,n]^3} \min(i, \max(j, k))$ .

### Applications à des sommes simples

#### Exercice 38.

Pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$ , on note  $S_n^{(p)} = \sum_{i=0}^n i^p$ .

1. Soit  $n, p \in \mathbb{N}$ .

En simplifiant de deux façons la somme  $\sum_{0 \leq i < j \leq n} i^p$ , montrer la *formule d'al-Haytham* (965-1039) :

$$n S_n^{(p)} - S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k^{(p)}.$$

2. En déduire une formule pour la suite  $(S_n^{(4)})_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 39.**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a_{i,j})_{(i,j) \in [1, n+1]^2}$  une famille de nombres. Montrer que

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n+1} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} + \sum_{i=1}^n a_{i, n+1} + \sum_{j=1}^n a_{n+1, j} + a_{n+1, n+1}.$$

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$ . (On a donc  $S_0 = 0$ ).

En calculant de deux façons (dont l'une utilise la question précédente) la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \left( \sum_{k=0}^n k \right)^2.$$

**Quelques inégalités****Autocorrection D.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par un encadrement grossier, montrer  $2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$ .

**Autocorrection E.**

1. Trouver un entier  $k_0$  (pas trop grand) tel que  $\forall k \geq k_0, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ .

2. En déduire  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$ .

**Exercice 40.**

1. Montrer  $\forall a, b \in \mathbb{R}, 4ab \leq (a+b)^2$ .

2. En déduire  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n)! \leq (n+1)^{2n-1}$ .

**Exercice 41 (Minoration d'Oresme).**

On rappelle que l'on note  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite des nombres harmoniques.

Montrer  $\forall n \in \mathbb{N}, H_{2n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ .

**Exercice 42.**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite positive telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n - b_{n+1}$ .

Montrer  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \frac{b_0}{n+1}$ .

**Exercice 43.**

1. Montrer  $\forall k \geq 2, 1 + \frac{1}{k^2} \leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$ .

2. En déduire  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) \leq 4$ .

**Exercice 44<sup>+</sup>**. 💡

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer  $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$ .

**Exercice 45<sup>++</sup>**. 💡

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\theta \not\equiv 1 \pmod{2\pi}$ .

1. Montrer que la suite  $\left(\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, c'est-à-dire  $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\right| \leq M$ .
2. Montrer que la suite  $\left(\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

**Exercice 46<sup>++</sup>**. 💡

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq 1$ .

On définit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_{n+1} - v_n| \leq \frac{1}{2}$ .

**Exercice 47<sup>+</sup> (Inégalité discrète de Sobolev-Gallagher)**. 💡

Soit  $n \geq 1$  et  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ . On note  $V = \sum_{\ell=1}^{n-1} |a_{\ell+1} - a_\ell|$ .

Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_k| \leq V + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n |a_\ell|$ .

1. Montrer  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_i - a_j| \leq V$ .
2. En déduire  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left|a_k - \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n a_\ell\right| \leq V$ .
3. Conclure.

**Exercice 48<sup>+</sup>**. ☑

Soit  $n \geq 1$  et  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2.$$

**Exercice 49<sup>++</sup> (Inégalité de corrélation de Čebyšëv)**. 💡

Soit  $n$  un entier et  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  deux familles croissantes indexées par  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_j\right).$$