
Inégalités

Exercice 1.

On a déjà fait cette démonstration, dans un autre contexte...

Exercice 2.

Appliquer habilement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 3.

On pourra habilement appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 4.

Pour la deuxième question, on pourra utiliser l'inégalité $\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ pour majorer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Exercice 6.

La continuité ne sert qu'à garantir le fait que l'intégrale soit bien définie.

On pourra utiliser la « croissance de l'intégrale » : si $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues telles que $\forall x \in [0, 1], \varphi(x) \leq \psi(x)$, alors $\int_0^1 \varphi(x) dx \leq \int_0^1 \psi(x) dx$.

Exercice 8.

On pourra chercher à diviser de part et d'autre par le membre de droite de l'inégalité, pour montrer une majoration par 1.

Exercice 9.

Pour la deuxième question, on pourra commencer par démontrer $\forall m \in \mathbb{N}, P(2^m)$.

Exercice 10.

On pourra développer le membre de droite et le réécrire sous la forme $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_i b_{i+k}$, où, dans l'expression b_{i+k} , les indices sont à comprendre *modulo* n , c'est-à-dire que par exemple $b_{n+1} = b_1$.

Exercice 12.

Étant donné une fonction f convexe générale, que peut-on dire de la fonction $x \mapsto f(-x)$?

Exercice 14.

On pourra se rappeler (voire redémontrer) qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si

$$\forall a < b < c \in \mathbb{R}_+^*, (c - a)g(b) \leq (c - b)g(a) + (b - a)g(c).$$

Exercice 18.

On pourra commencer par remarquer que le résultat est facile sur $[0, 1[$.

Exercice 23.

Pour la deuxième question, on pourra chercher à minorer H_{3n+1} en fonction de H_n .

Exercice 31.

Pour mettre le problème en équations, on pourra calculer l'aire du n -gone en le découpant en triangles dont un sommet est au centre du cercle.

Exercice 33.

On pourra, après justification se ramener au cas où $x \leq y \leq \frac{x+z}{2} \leq z$.

Exercice 35.

2. Dans le sens difficile, remarquer que la fonction $\frac{f^\alpha - 1}{\alpha}$ est convexe.
3. Dans le sens difficile, obtenir une inégalité de la forme $f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)u_\beta + \lambda v_\beta$, puis régler β de telle sorte que $u_\beta = v_\beta$ (c'est une manière usuelle, dans ce genre de cas, de transformer une expression additive en une expression multiplicative).

Exercice 36.

Procéder par l'absurde. Voyez-vous pourquoi on peut se ramener au cas d'une fonction strictement positive, strictement croissante, et strictement convexe ou strictement concave ?

Autocorrection**Autocorrection A.**

$$(i) \text{ On a } 1 = \sum_{k=1}^n p_k \times 1 \stackrel{CS}{\leq} \sqrt{\sum_{k=1}^n p_k^2} \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2}}_{=\sqrt{n}}, \text{ donc } \sum_{k=1}^n p_k^2 \geq \frac{1}{n}.$$

$$(ii) \text{ On a } n = \sum_{k=1}^n \sqrt{p_k} \times \frac{1}{\sqrt{p_k}} \stackrel{CS}{\leq} \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^n p_k}}_{=1} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k}}, \text{ donc } \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \geq n^2.$$

$$(iii) \text{ On a } n^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \times 1 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k^2}} \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^n 1}}_{=\sqrt{n}}, \text{ donc } n^4 \leq n \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k^2}, \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k^2} \geq n^3.$$

Autocorrection B.

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique (avec des poids tous égaux) à $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n} \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1/x_1 + \dots + 1/x_n}{n} \geq \left(\frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_n} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* ,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 \dots x_n)^{1/n}.$$

Autocorrection C.

1. (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après l'inégalité arithmético-géométrique, $\frac{t + 1/t}{2} \geq \sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 1$, ce qui conclut.

(b) On développe :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} \right) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{x_i}{x_j} \\ &= \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{x_k}{x_k}}_{=1} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \right) \\ &\stackrel{*}{\geq} n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2 \\ &\geq n + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} 1 \\ &\geq n + 2 \sum_{j=1}^n (j-1) \\ &\geq n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &\geq n + 2 \frac{(n-1)n}{2} = n^2, \end{aligned}$$

où l'inégalité astérisquée s'obtient en sommant les inégalités $\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geq 2$ obtenues en appliquant la question précédente à $t = \frac{x_i}{x_j}$.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$n = \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \leq \frac{1}{\sqrt{x_i}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}},$$

ce qui conclut immédiatement.

Autocorrection D.

► Commençons par montrer que J est un intervalle. Soit $u, v \in J$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$a[(1-\lambda)u + \lambda v] + b = (1-\lambda) \underbrace{(au + b)}_{\in I} + \lambda \underbrace{(av + b)}_{\in I} \in I,$$

donc $(1-\lambda)u + \lambda v \in J$ ce qui conclut.

► Soit maintenant, $u, v \in J$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} g((1-\lambda)u + \lambda v) &= f((1-\lambda)(au + b) + \lambda(av + b)) \\ &\leq (1-\lambda)f(au + b) + \lambda f(av + b) \\ &\leq (1-\lambda)g(u) + \lambda g(v), \end{aligned}$$

ce qui conclut.

Autocorrection E.

1. Soit $a, b \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)a + \lambda b) &\leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) && (f \text{ convexe}) \\ \text{donc } g(f((1-\lambda)a + \lambda b)) &\leq g((1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)) && (g \text{ croissante}) \\ &\leq (1-\lambda)g(f(a)) + \lambda g(f(b)), && (g \text{ convexe}) \end{aligned}$$

ce qui montre que $g \circ f$ est convexe.

2. Avec les mêmes notations, on montre de même que :

- ▶ si f est convexe et g est concave et décroissante, alors $g \circ f$ est concave ;
- ▶ si f est concave et g est concave et croissante, alors $g \circ f$ est concave ;
- ▶ si f est concave et f est convexe et décroissante, alors $g \circ f$ est convexe.

3. Considérons $f = \exp$ et $g : x \mapsto -x$ (affine donc convexe). La composée $g \circ f = -\exp$ n'est pas convexe (sa dérivée seconde est strictement négative).

Autocorrection F.

Soit $x_1 \leq x_2 \in \mathbb{R}_+$. Comme $a - x_2 \leq a - x_1 \leq a + x_2$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$a - x_1 = (1 - \lambda)(a - x_2) + \lambda(a + x_2).$$

On en déduit l'expression pour $a + x_1$, en utilisant le fait que a est à la fois le milieu des segments $[a - x_1, a + x_1]$ et $[a - x_2, a + x_2]$:

$$\begin{aligned} \frac{(a - x_1) + (a + x_1)}{2} &= \frac{(a - x_1) + (a + x_1)}{2} \\ \text{donc } a + x_1 &= (a - x_2) + (a + x_2) - (a - x_1) \\ &= \lambda(a - x_2) + (1 - \lambda)(a + x_2). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} g(x_1) &= f(a - x_1) + f(a + x_1) \\ &= f((1 - \lambda)(a - x_2) + \lambda(a + x_2)) + f(\lambda(a - x_2) + (1 - \lambda)(a + x_2)) \\ &\leq (1 - \lambda)f(a - x_2) + \lambda f(a + x_2) + \lambda f(a - x_2) + (1 - \lambda)f(a + x_2) \\ &\leq f(a - x_2) + f(a + x_2) \\ &\leq g(x_2). \end{aligned}$$

Autocorrection G.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n. \end{cases}$ Cette fonction est lisse, et $f'' : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ n(n-1)x^{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$ est positive.

La fonction f est donc convexe.

Soit maintenant $x, y \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\frac{(x+y)^n}{2^n} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} = \frac{x^n + y^n}{2},$$

ce qui conclut.