Dénombrement

Exercice 1.

Dans la deuxième question, on peut chercher à mieux comprendre une n-liste de 0 et de 1 dont la première occurence de « 1 » est en p-ième position : à quoi ressemble le début de la liste ? la fin ?

Exercice 6.

Le principe de bijection permet de transformer ce dénombrement en un (très simple) dénombrement d'applications.

Exercice 8.

On pourra commencer par calculer la réponse pour les petites valeurs de n, avant de conjecturer une relation de récurrence.

Exercice 11.

Dans la dernière question :

(a) Étant donné une fonction $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ croissante et $j \in [\![1, n]\!]$, on pourra considérer le nombre $a_j = |\{x \in [\![1, p]\!] \mid f(x) = j\}|$.

(b) On pourra commencer par remarquer que si l'application $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ est croissante, alors $x \mapsto f(x) + x - 1$ définit une application strictement croissante.

Exercice 19.

Commencer par les cas $p = q = 2$, puis $p = 2$, $q > 2$.

Exercice 26.

Pour la dernière question, on pourra utiliser la minoration assez évidente $|X + Y| \geqslant |X|$, valable (pourquoi ?) dès que Y n'est pas vide.

Autocorrection

Autocorrection A.

1. Un élément de E est essentiellement la même chose qu'un mot de longueur 7 sur l'alphabet $[\![1, 9]\!]$. Ainsi $|E| = 9^7 = 4\,782\,969$.
2. Avec le point de vue précédent, un élément de E_1 correspond à un 7-**arrangement** sur $[\![1, 9]\!]$, donc $|E_1| = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 181\,440$.
3. Un élément de E est pair si et seulement si son dernier chiffre est 2, 4, 6 ou 8. Ainsi, pour construire un élément de E_2 :
   - on choisit les 6 premiers chiffres, qui forment un mot de longueur 6 sur $[\![1, 9]\!]$: il y a 9^6 possibilités ;
   - on choisit le dernier chiffre dans $\{2, 4, 6, 8\}$: il y a 4 possibilités.

   D'après le principe de multiplication, on a donc $|E_2| = 9^6 \times 4 = 2\,125\,764$.

4. Pour construire un élément de E_3, il suffit de choisir l'ensemble des 7 chiffres qui interviendront dans le nombre. Puisque ceux-ci doivent être rangés par ordre croissant, il y a alors un seul nombre possédant ces chiffres.

   Ainsi, le cardinal de E_3 est exactement le nombre de parties à 7 éléments de $[\![1, 9]\!]$:

$$|E_3| = |\mathcal{P}_7([\![1, 9]\!])| = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36.$$

Autocorrection B.

(i) Chaque matin, on dispose de deux possibilités : thé ou café.

D'après le principe de multiplication, il y a donc $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ « historiques » possibles.

Plus mathématiquement, un historique de n petits-déjeuners correspond à un mot de longueur n sur l'alphabet à 2 lettres $\{\mathtt{C}, \mathtt{T}\}$, donc il y en a 2^n.

(ii) On va procéder par soustraction.

Les seuls historiques interdits par la contrainte « avoir bu au moins une fois chaque boisson » sont ceux entièrement composés de café ou de thé, c'est-à-dire les mots $\mathtt{CC}\ldots\mathtt{C}$ et $\mathtt{TT}\ldots\mathtt{T}$.

Il n'y a donc que deux historiques interdits par la contrainte donc, par principe de soustraction, $2^n - 2$ historiques respectant ladite contrainte.

(iii) Pour avoir bu aussi souvent une boisson que l'autre, il faut déjà que le nombre n de jours soit pair. Dans le cas contraire, il y aura donc 0 historiques respectant la contrainte.

Si n est pair, on est en train de compter les mots de longueur n sur l'alphabet à 2 lettres $\{\mathtt{C}, \mathtt{T}\}$ avec $n/2$ occurrences de $\mathtt{C}$ et de $\mathtt{T}$. Autrement dit, on dénombre les anagrammes de

$$\underbrace{\mathtt{CC}\ldots\mathtt{C}}_{n/2 \text{ lettres}}\underbrace{\mathtt{TT}\ldots\mathtt{T}}_{n/2 \text{ lettres}}.$$

Pour construire une telle anagramme, on peut commencer par choisir les emplacements de la lettre $\mathtt{C}$ (c'est-à-dire les jours où l'on boit du café) : il y a $\binom{n}{n/2}$ possibilités. Les autres jours sont alors consacrés au thé.

In fine, le nombre d'historiques respectant la contrainte de l'énoncé est

$$\begin{cases} \binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iv) Si l'on ne prend jamais la même boisson deux fois de suite, le choix de la première boisson détermine entièrement la suite de l'historique.

Il n'y a ainsi que deux historiques possibles :

$$\mathtt{CTCTCTCTCT}\ldots \quad \text{et} \quad \mathtt{TCTCTCTCTC}\ldots.$$

(v) Si l'on cherche une idée, on peut toujours dénombrer les possibilités pour les petites valeurs de n. Notons P_n le nombre de possibilités pour un historique de n jours.

Cas $n = 1$.

- $\mathtt{C}$;
- $\mathtt{T}$.

Donc $P_1 = 2$.

Cas $n = 2$.

- `CT`;
- `TC`;
- `TT`.

Donc $P_2 = 3$.

Cas $n = 3$.

- `CTC`;
- `CTT`;
- `TCT`;
- `TTC`;
- `TTT`.

Donc $P_3 = 5$.

Cas $n = 4$.

- `CTCT`;
- `CTTC`;
- `CTTT`;
- `TCTC`;
- `TCTT`;
- `TTCT`;
- `TTTC`;
- `TTTT`.

Donc $P_3 = 8$.

Il est possible de remarquer sur ces exemples un aspect récurrent. On peut par exemple remarquer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble être constituée de nombres de Fibonacci, ou à tout le moins qu'elle vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = P_{n+1} + P_n$.

Il est en fait même possible de remarquer quelque chose de plus précis : à chaque étape, il y a plus d'historiques commençant par `T` que par `C`, et ceux commençant par `T` sont exactement formés d'un `T` précédant la liste des possibilités à l'étape précédente. Par exemple, les cinq mots `CTC`, `CTT`, `TCT`, `TTC` et `TTT` fournissent les cinq possibilités `TCTC`, `TCTT`, `TTCT`, `TTTC` et `TTTT` commençant par un `T`.

Nous pouvons montrer $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = P_{n+1} + P_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Il y a deux types d'historiques de longueur $n + 2$ sans `CC`.

- Ceux commençant par `T`.

  Dans ce cas, la suite de l'historique est un historique sans `CC` de longueur $n + 1$.

  Réciproquement, si on ajoute un `T` en première position à un historique sans `CC` de longueur $n + 1$, on obtient un historique sans `CC` de longueur $n + 2$.

  Il y a ainsi P_{n+1} historiques sans `CC` de longueur $n + 2$ commençant par `T`.
- Ceux commençant par `C`.

  Comme on ne peut pas commencer par `CC`, la deuxième lettre est alors un `T`.

  Dans ce cas, la suite de l'historique est un historique sans `CC` de longueur n.

  Réciproquement, si on ajoute un `CT` au début d'un historique sans `CC` de longueur n, on obtient un historique sans `CC` de longueur $n + 2$.

  Il y a ainsi P_n historiques sans `CC` de longueur $n + 2$ commençant par `C`.

Par principe d'addition, il y a donc $P_{n+1} + P_n$ historiques sans `CC` de longueur $n + 2$, ce qui montre bien $P_{n+2} = P_{n+1} + P_n$.

Si l'on se souvient que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

(premières valeurs : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, etc.), le fait que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et que $P_1 = F_3$ et $P_2 = F_4$ montre facilement (par récurrence double) que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = F_{n+2}$.

Il y a donc F_{n+2} historiques de longueur n sans `CC`.

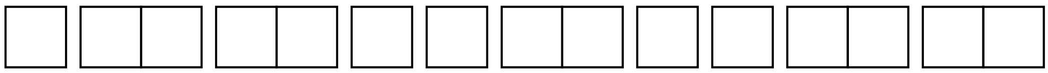
(vi) Imaginons qu'on enregistre notre historique sur une frise. Un historique respectant la contrainte ressemble à

C	T	T	C	C	T	C	T	T	C	T	C	C	T	T

c'est-à-dire qu'il s'obtient en posant à la suite des « carreaux » $\boxed{\mathtt{C}}$ et $\boxed{\mathtt{T}}$ ainsi que des « dominos » $\boxed{\mathtt{C}\,|\,\mathtt{C}}$ et $\boxed{\mathtt{T}\,|\,\mathtt{T}}$, en alternant les `C` et les `T`.

Or, pour obtenir une telle frise,

- on peut d'abord en choisir la « forme » des pièces, par exemple



- puis choisir la première boisson.

La contrainte (qui force à alterner les carreaux/dominos `C` et `T`) détermine alors entièrement l'historique (dans notre exemple, si l'on commence par `C`, le reste est entièrement déterminé).

Par principe de multiplication, le nombre d'historiques vérifiant la contrainte est exactement le double du nombre Q_n de manières de remplir un rectangle $1 \times n$ en utilisant des carreaux 1×1 et des dominos 1×2.

Or, on peut vérifier facilement que $\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = F_{n+1}$. En effet, il est facile de voir que le nombre Q_n de remplissages vérifie la relation de récurrence $Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n$: pour remplir un rectangle de longueur $n+2$, on peut soit commencer par un carreau (auquel cas il restera un rectangle de longueur $n+1$ à remplir, et donc Q_{n+1} possibilités), soit par un domino (auquel cas il restera un rectangle de longueur n et donc Q_n possibilités). On conclut alors en remarquant que $Q_1 = 1 = F_2$ et $Q_2 = 2 = F_3$.

In fine, le nombre d'historiques sans `CCC` ni `TTT` est $2\,F_{n+1}$.

Autocorrection C.

On décide, dans toute la suite, d'interpréter une « main » comme un ensemble et non pas une liste, c'est-à-dire que l'on considère qu'il n'y a pas de notion d'ordre entre les cinq cartes d'une main.

Dans les justifications, on notera $C = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$ l'ensemble des quatre couleurs et $H = \{A, R, D, \ldots, 8, 7\}$ l'ensemble des huit hauteurs. Le jeu J de 32 cartes s'identifie alors au produit cartésien $C \times H$.

(i) Une main est simplement une partie à 5 éléments de J, donc il y en a $\binom{32}{5} = 201\,376$.

(ii) Pour construire une telle main,

- on choisit la couleur ($\heartsuit$ ou $\clubsuit$) : 2 possibilités ;
- on choisit les cinq hauteurs, c'est-à-dire une partie à 5 éléments de H : $\binom{8}{5}$ possibilités.

Par principe de multiplication, il y a donc $2 \times \binom{8}{5} = 112$ telles mains.

(iii) Pour construire une telle main,

- on choisit les hauteurs des deux cœurs : $\binom{8}{2}$ possibilités ;
- on choisit les hauteurs des trois trèfles : $\binom{8}{3}$ possibilités.

Par principe de multiplication, il y a donc $\binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1568$ telles mains.

(iv) Comptons d'abord les mains sans as : elles s'identifient aux parties à 5 éléments du jeu sans les as $J \setminus \{A\spadesuit, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit\}$, donc il y en a $\binom{28}{5}$.

Par principe de soustraction, il y a $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\,096$ mains sans as.

(v) On va utiliser le principe d'addition.

Mains sans as. Comme on l'a dit à la question précédente, il y a $\binom{28}{5}$ mains sans as.

Mains avec exactement un as. Pour construire une telle main,

- on choisit l'as : 4 possibilités ;
- on choisit les quatre autres cartes, c'est-à-dire une partie à 4 éléments du jeu sans les as $J \setminus \{A\spadesuit, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit\}$: $\binom{28}{4}$ possibilités.

Par principe de multiplication, il y a donc $4 \times \binom{28}{4}$ mains avec exactement un as.

Par principe d'addition, il y a donc $\binom{28}{5} + 4 \times \binom{28}{4} = 180\,180$ mains avec au plus un as.

(vi) Comptons d'abord les mains sans paire.

Pour construire une telle main,

- on choisit les cinq hauteurs (différentes) : $\binom{8}{5}$ possibilités ;
- pour chacune des cinq hauteurs (de la plus haute à la plus basse, par exemple), on choisit la couleur : 4 possibilités par hauteur, donc (par principe de multiplication) 4^5 possibilités.

Par principe de multiplication, il y a donc $\binom{8}{5} \times 4^5$ mains sans paire.

Par principe de soustraction, il y a donc $\binom{32}{5} - \binom{8}{5} \times 4^5 = 144\,032$ mains avec au moins une paire.

(vii) On va compter séparément les doubles paires et les fulls.

Mains de type « AABBC », c'est-à-dire les doubles paires qui ne sont pas des fulls. Pour construire une telle main,

- on choisit les hauteurs des deux paires, c'est-à-dire deux hauteurs parmi les huit : $\binom{8}{2}$ possibilités ;
- on choisit la hauteur de la carte seule, parmi les deux non encore prises : 6 possibilités ;
- on choisit les couleurs de la plus grande des deux hauteurs choisie à la première étape : $\binom{4}{2}$ possibilités ;

- on choisit les couleurs de la plus petite des deux hauteurs choisie à la première étape : $\binom{4}{2}$ possibilités ;
- on choisit la couleur de la carte seule : 4 possibilités.

Par principe de multiplication, il y a donc $\left(\binom{8}{2} \times 6\right) \times \left(\binom{4}{2}^2 \times 4\right)$ mains de type « AABBC ».

Mains de type « AAABB », c'est-à-dire les fulls. Pour construire une telle main,

- on choisit la hauteur du brelan : 8 possibilités ;
- on choisit la hauteur de la paire : 7 possibilités ;
- on choisit les couleurs du brelan : $\binom{4}{3}$ possibilités ;
- on choisit les couleurs de la paire : $\binom{4}{2}$ possibilités.

Par principe de multiplication, il y a donc $(8 \times 7) \times \left(\binom{4}{2} \times \binom{4}{3}\right)$ fulls.

Par principe d'addition, il y a donc

$$\left(\binom{8}{2} \times 6\right) \times \left(\binom{4}{2}^2 \times 4\right) + (8 \times 7) \times \left(\binom{4}{2} \times \binom{4}{3}\right) = 25\,536$$

mains avec au moins deux paires de hauteurs différentes.

(viii) Dans cette question, on dira qu'une carte est ordinaire si elle n'est ni un as, ni un cœur. Remarquons que

$$|\{\text{as}\} \cup \{\text{cœurs}\}| = |\{\text{as}\}| + |\{\text{cœurs}\}| - |\{\text{as}\} \cap \{\text{cœurs}\}| = 4 + 8 - 1 = 11,$$

de telle sorte qu'il y a $32 - 11 = 21$ cartes ordinaires.

(On peut aussi dire que l'ensemble des cartes ordinaires est $(C \setminus \{\heartsuit\}) \times (H \setminus \{A\})$, et appliquer le principe de multiplication : on obtient $21 = 3 \times 7$ cartes ordinaires.)

On va maintenant distinguer suivant la présence ou non de l'as de cœur dans la main.

Mains avec l'as de cœur. Pour construire une telle main,

- on prend l'as de cœur : 1 possibilité ;
- on choisit l'autre as : 3 possibilités ;
- on choisit les deux autres cœurs : $\binom{7}{2}$ possibilités ;
- on choisit une carte ordinaire pour compléter la main : 21 possibilités.

Par principe de multiplication, il y a donc $3 \times \binom{7}{2} \times 21$ mains vérifiant les contraintes de l'énoncé et contenant l'as de cœur.

Mains sans l'as de cœur. Pour construire une telle main,

- on choisit les deux as (parmi les quatre pas à cœur) : $\binom{3}{2}$ possibilités ;
- on choisit les trois cœurs (parmi les sept qui ne sont pas l'as) : $\binom{7}{3}$ possibilités.

Par principe de multiplication, il y a donc $\binom{3}{2} \times \binom{7}{3}$ mains vérifiant les contraintes de l'énoncé et ne contenant pas l'as de cœur.

Par principe d'addition, il y a donc $3 \times \binom{7}{2} \times 21 + \binom{3}{2} \times \binom{7}{3} = 1428$ mains vérifiant les contraintes de l'énoncé.

(ix) On suit essentiellement le même raisonnement qu'à la question précédente, et on obtient le total de

$$\overbrace{\underbrace{\binom{7}{2} \times \binom{21}{2}}_{\text{trois }\diamondsuit} + \underbrace{\binom{7}{3} \times 21}_{\text{quatre }\diamondsuit} + \underbrace{\binom{7}{4}}_{\text{cinq }\diamondsuit}}^{\text{avec A}\diamondsuit} + \overbrace{\underbrace{3 \times \binom{7}{3} \times 21}_{\text{trois }\diamondsuit} + \underbrace{3 \times \binom{7}{4}}_{\text{quatre }\diamondsuit}}^{\text{avec un as} \neq \text{A}\diamondsuit} = 7490.$$

(x) C'est encore essentiellement le même procédé qu'aux deux questions précédentes.

On peut gagner un peu de temps en utilisant le principe de soustraction pour dénombrer les cartes avec le roi de cœur. Pour construire une telle main, on ajoute au roi de cœur une main de quatre cartes, sans cœur, avec au moins un roi. Comme il y a 24 cartes qui ne sont pas des cœurs, il y a $\binom{24}{4}$ mains de quatre cartes sans cœur, et $\binom{21}{4}$ mains de quatre cartes sans cœur et sans roi. Ainsi, il y a $\binom{24}{4} - \binom{21}{4}$ mains de quatre cartes sans cœur, avec au moins un roi, et donc autant de mains de cinq cartes vérifiant les contraintes de l'énoncé et contenant le roi de cœur.

In fine, on trouve le total de

$$\overbrace{\binom{24}{4} - \binom{21}{4}}^{\text{avec R}\heartsuit} + \overbrace{\underbrace{7 \times \binom{3}{2} \times \binom{21}{2}}_{\text{deux rois}} + \underbrace{7 \times \binom{3}{3} \times 21}_{\text{trois rois}}}^{\text{avec un cœur} \neq \text{R}\heartsuit} + \overbrace{\underbrace{\binom{3}{2} \times \binom{21}{3}}_{\text{deux rois}} + \underbrace{\binom{3}{3} \times \binom{21}{2}}_{\text{trois rois}}}^{\text{sans }\heartsuit} = 13\,398.$$

Autocorrection D.

Comme on va le voir dans la suite, le cas des parties de diamètre nul (c'est-à-dire des singletons) est particulier : il y a exactement n parties de $[\![1, n]\!]$ de diamètre nul.

Supposons dans la suite $k \geqslant 1$.

Pour construire une partie $A \subseteq [\![1, n]\!]$ de diamètre k,

- on choisit le minimum $m = \min A$: il doit être suffisamment petit pour que $\max A = \min A + k$ appartienne encore à $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire qu'il faut que $m \in [\![1, n-k]\!]$: $n - k$ possibilités ;
- pour chacun des éléments compris strictement entre m et $m + k$ (il y en a [1] $k - 1$), on choisit si on le met ou non dans la partie A : il y a donc 2 possibilités pour chacun de ces éléments.

Par principe de multiplication, il y a donc $(n - k)2^{k-1}$ parties de diamètre k.

Autocorrection E.

1. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} && \text{(symétrie)} \\ &= \binom{2n}{n}. && \text{(Vandermonde)} \end{aligned}$$

1. C'est ici que l'on utilise le fait que $k \geqslant 1$.

2. On reprend (plus formellement) la démonstration du cours de la formule de convolution de Vandermonde.

   On note $N = n_1 + \cdots + n_p$ et, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\Delta(N) = \{(k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{N} \mid k_1 + \cdots + k_p = q\}$. On se donne également des ensembles $E_1, \ldots, E_p$ disjoints de cardinaux respectifs $n_1, \ldots, n_p$ (si on veut un exemple explicite, on peut prendre $E_i = \{i\} \times [\![1, i]\!] \subseteq \mathbb{N}^2$) et on définit $E = \bigsqcup_{i=1}^{p} E_i$.

   Pour tout $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_p) \in \Delta(q)$, on note $P(\underline{k})$ l'ensemble des parties de E contenant k_1 éléments de E_1, …, k_p éléments de E_p.

   On a alors $\mathcal{P}_q(E) = \bigsqcup_{\underline{k} \in \Delta(q)} E(\underline{k})$.

   - Soit $\underline{k} \in \Delta(q)$. Pour construire un élément de $P(\underline{k})$,
     - on choisit une partie à k_1 éléments de E_1 : $\binom{n_1}{k_1}$ possibilités ;
     - etc.
     - on choisit une partie à k_p éléments de E_p : $\binom{n_p}{k_p}$ possibilités.

     Par principe de multiplication, $|P(\underline{k})| = \binom{n_1}{k_1} \cdots \binom{n_p}{k_p}$.
   - Par principe d'addition, on en déduit

$$\binom{n_1 + \cdots + n_p}{q} = |\mathcal{P}_q(E)| = \sum_{\underline{k} \in \Delta(q)} |P(\underline{k})| = \sum_{k_1 + \cdots + k_p = q} \binom{n_1}{k_1} \cdots \binom{n_p}{k_p}.$$