
Arithmétique

Exercice 3.

Essayer de réécrire les équations pour obtenir des formes factorisées (par exemple, la première peut être mise sous forme $ab = 6$).

Exercice 4.

Un diviseur commun à $n^2 + n$ et $2n + 1$ est nécessairement diviseur de tous les nombres de la forme $u(n^2 + n) + v(2n + 1)$: on peut alors choisir u et v de façon à obtenir plus de renseignements sur le diviseur.

Exercice 19.

On pourra commencer par montrer que si (x, y) est une solution telle que $x \leq y$ alors $x \mid y$.

Autocorrection

Autocorrection A.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (i) n est un multiple de 2 si et seulement si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8;
- (ii) n est un multiple de 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3;
- (iii) n est un multiple de 4 si et seulement si le nombre obtenu en gardant ses deux derniers chiffres est un multiple de 4;
- (iv) n est un multiple de 5 si et seulement si son dernier chiffre est 0 ou 5;
- (v) n est un multiple de 8 si et seulement si le nombre obtenu en gardant ses trois derniers chiffres est un multiple de 8;
- (vi) n est un multiple de 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
- (vii) n est un multiple de 10 si et seulement si son dernier chiffre est 0;
- (viii) n est un multiple de 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres l'est.

On note c_0, c_1, \dots, c_r les chiffres de n , lus de droite à gauche. On a donc l'égalité

$$n = \sum_{i=0}^r c_i 10^i.$$

► On a l'égalité

$$n = c_0 + 10 \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^r c_i 10^{i-1} \right)}_{\in \mathbb{N}},$$

donc n est divisible par 2, 5 ou 10 si et seulement si c_0 l'est, ce qui démontre les points (i), (v) et (vii).

► On a l'égalité

$$n = (c_0 + 10 c_1) + 100 \times \underbrace{\left(\sum_{i=2}^r c_i 10^{i-2} \right)}_{\in \mathbb{N}},$$

donc n est divisible par 4 si et seulement si $c_0 + 10 c_1$ l'est, ce qui démontre le point (iii).

► On montre de la même façon le critère de divisibilité par 8 (et même par toute puissance de 2).

► On a $10 \equiv 1 \pmod{9}$ et donc modulo 3, donc $n \equiv \sum_{i=0}^r c_i \pmod{9}$ (et donc modulo 3).

En particulier, n est divisible par 3 ou 9 si et seulement si $\sum_{i=0}^r c_i$ l'est, ce qui démontre les points (ii) et (vi).

► On a $10 \equiv -1 \pmod{11}$, donc $n \equiv \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i$, ce qui démontre (viii) de la même façon.

Les critères montrent facilement que 14 652 est divisible par 4, 9 et 11, et donc par $4 \times 9 \times 11 = 396$.
En posant la division, $14\,652 = 396 \times 37$.

Comme 37 est premier, on obtient $14\,652 = 2^2 \times 3^2 \times 11 \times 37$.

Autocorrection B.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(i) L'égalité $n + 3 = (n + 1) + 2$ permet d'écrire la première équivalence de la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}n + 1 \mid n + 3 &\Leftrightarrow n + 1 \mid 2 \\ &\Leftrightarrow n + 1 \in \{1, 2\} \\ &\Leftrightarrow n \in \{0, 2\}.\end{aligned}$$

(ii) L'égalité $n^2 + 3n + 8 = (n + 2)(n + 1) + 6$ permet d'écrire la première équivalence de la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}n + 2 \mid n^2 + 3n + 8 &\Leftrightarrow n + 2 \mid 6 \\ &\Leftrightarrow n + 2 \in \{1, 2, 3, 6\} \\ &\Leftrightarrow n + 2 \in \{2, 3, 6\} && \text{car } n \geq 0 \\ &\Leftrightarrow n \in \{0, 1, 4\}.\end{aligned}$$

Autocorrection C.

(i) On a

$$438 = 8 \times 51 + 30 \tag{1}$$

$$51 = 1 \times 30 + 21 \tag{2}$$

$$30 = 1 \times 21 + 9 \tag{3}$$

$$21 = 2 \times 9 + 3 \tag{4}$$

$$9 = 3 \times 3 + 0,$$

donc $\text{pgcd}(438, 51) = 3$.

(ii) Par le même calcul, on obtient $\text{pgcd}(151, 77) = 1$.

(iii) $\text{pgcd}(1320, 720) = 120$.

(iv) $\text{pgcd}(63, 17) = 1$ (la primalité de 17 rend d'ailleurs cela évident).

(v) $\text{pgcd}(120, 23) = 1$ (même remarque : 23 est premier).

(vi) $\text{pgcd}(8136, 492) = 12$.

Autocorrection D.

L'entier $n! + 1$ est ≥ 2 , donc il admet un diviseur premier $p \leq n! + 1$.

Il reste à montrer que $p > n$. Pour cela, il suffit de constater que si $p \leq n$, on a $p \mid n!$, donc on a $p \wedge (n! + 1) = p \wedge 1 = 1$, ce qui contredit la définition de p .

En particulier, on a montré que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existait un nombre premier $p > n$. Il existe des nombres premiers arbitrairement grands, ce qui démontre qu'il existe une infinité de nombres premiers.