Arithmétique

Divisibilité

Autocorrection A.

Se rappeler ou retrouver les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 et 11 (en les démontrant).

Les utiliser pour obtenir (à la main !) la décomposition en facteurs premiers de 14 652.

Autocorrection B.

Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ vérifiant les conditions suivantes.

(i) $n+1 \mid n+3$; (ii) $n+2 \mid n^2+3n+5$.

Exercice 1.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^4 - n^2$ est un multiple de 12.

Exercice 2.

Montrer que pour tout $n > 0$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Exercice 3.

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes.

(i) $np = 3n + 2p$; (ii) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{5}$; (iii) $n^2 - p^2 - 4n - 2p = 5$.

PGCD, PPCM, coprimalité

Autocorrection C.

Pour tous les couples (a, b) suivants, utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de a et b.

(i) $(a,b) = (438, 51)$; (iii) $(a,b) = (1320, 720)$; (v) $(a,b) = (120, 23)$;
(ii) $(a,b) = (151, 77)$; (iv) $(a,b) = (63, 17)$; (vi) $(a,b) = (8136, 492)$.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $n^2 + n$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. Montrer que $3n^2 + 2n$ et $n+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 5.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $2k+1$ et $9k+4$ sont premiers entre eux.

Calculer le PGCD de $2k-1$ et $9k+4$.

Exercice 6.

Trouver tous les entiers $n > 0$ tels que $n^2 + 1$ est divisible par $n + 1$.

Exercice 7.

Déterminer $\{(2n + 4) \wedge (3n + 3) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 8 (Nombres de Mersenne).

Soit $a, b, n \geqslant 2$ trois entiers.

1. Montrer que $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$.
2. En déduire que si $a^n - 1$ est un nombre premier, alors $a = 2$ et n est un nombre premier.
3. On note r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.
4. Montrer que $\left(2^a - 1\right) \wedge \left(2^b - 1\right) = 2^{a \wedge b} - 1$.

Exercice 9. ☑

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, c'est-à-dire la suite définie par

$$F_0 = F_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^*, F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$.
2. En déduire $\forall n, m \in \mathbb{N}^*, F_n \wedge F_{n+m} = F_n \wedge F_m$.
3. En déduire que si n et m sont deux entiers non nuls et que r est le reste de la division euclidienne de m par n, alors $F_n \wedge F_m = F_n \wedge F_r$.
4. Montrer : $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$.

Exercice 10 (Nombres de Fermat).

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^m + 1$ soit premier. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2^n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3, F_4.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} - 2 = (F_n - 2)F_n$.
4. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de F_n en fonction des $(F_k)_{k=1}^{n-1}$.
5. Montrer que si $m \neq n$ alors F_n et F_m sont premiers entre eux.
6. En déduire une nouvelle preuve de l'existence d'une infinité de nombres premiers.

Exercice 11.

Montrer que tout entier > 6 est la somme de deux entiers > 1 premiers entre eux.

Nombres premiers

Autocorrection D. ☑

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un nombre premier compris entre $n + 1$ et $n! + 1$.

En déduire une nouvelle preuve de l'existence d'une infinité de nombres premiers.

Exercice 12.

Soit p un nombre premier $\geqslant 5$. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Exercice 13.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe n nombres composés consécutifs.

Exercice 14. ☑

Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs n'est jamais le produit de deux nombres premiers.

Exercice 15$^+$. *ÉNS (PC)*

1. Soit $X \subseteq \mathbb{N}$ tel que $0, 1 \in X$ et $\left|X \cap [\![1, n]\!]\right| = \underset{n \to +\infty}{o}(n)$.

   Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\left|X \cap [\![j, j+k]\!]\right| = 2$.
2. Montrer qu'il existe un ensemble de cent entiers consécutifs contenant exactement cinq nombres premiers.

Exercice 16$^+$ (Petit théorème de Fermat). ☑

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. En déduire une démonstration par récurrence de $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a^p \equiv a \pmod p$.

Exercice 17^{++} (Identité de Sophie Germain).

Montrer que si $n > 1$, $n^4 + 4^n$ n'est pas premier.

Décomposition en facteurs premiers

Exercice 18. ☑

Un nombre $6666\ldots0000$ formé de six-cent-soixante-six « 6 » et éventuellement de quelques zéros à la fin peut-il être un carré parfait ?

Exercice 19. 💡

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation $x^y = y^x$.

Exercice 20$^+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\nu(n)$ l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de n.

Soit $2 \leqslant a \leqslant b$ deux entiers.

1. Montrer que ν atteint sur l'intervalle entier $[\![a, b]\!]$ un unique maximum.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} \frac{1}{k}$ n'est pas entier.

Exercice 21. ☑

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs (positifs) de n et $p(n)$ leur produit.

1. Quelles sont les inégalités liant n, $\tau(n)$ et $p(n)$?
2. Montrer que $\tau(n)$ est impair si et seulement si n est un carré parfait.
3. Exprimer $\tau(n)$ en fonction des valuations p-adiques de n.
4. Montrer que $p(n) = \sqrt{n^{\tau(n)}}$.

Exercice 22. ☑

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n n'est divisible par aucun carré parfait > 1 si et seulement s'il s'écrit comme produit de nombres premiers tous distincts. (On dit que n est *quadratfrei*.)
2. Montrer que tout entier s'écrit de manière unique comme produit d'un carré parfait et d'un entier *quadratfrei*.
3. Soit $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers distincts et $N \geqslant 1$. Montrer que le nombre d'entiers $\leqslant k$ divisibles par aucun autre nombre premier que ceux-ci est $\leqslant 2^r\sqrt{N}$.
4. En déduire une autre preuve de l'existence d'une infinité de nombres premiers.

Exercice 23.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n. On dit que n est *parfait* si $\sigma(n) = 2n$ (c'est-à-dire si n est égal à la somme de ses diviseurs différents de lui-même).

1. Montrer que 6 et 28 sont parfaits.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En commençant par le cas où n est une puissance d'un nombre premier, établir une formule pour $\sigma(n)$ en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n.
3. Montrer que si n et m sont des nombres premiers entre eux, alors $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.
4. Soit p un nombre premier tel que $2^p - 1$ soit premier. Montrer que $2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait.
5. Soit n un entier pair parfait. Il existe $a \in \mathbb{N}^*$ et b entier impair tels que $n = 2^a b$.
   (a) Montrer : $\sigma(n) = (2^{a+1} - 1)\sigma(b)$.
   (b) En déduire qu'il existe un entier impair c tel que $b = (2^{a+1} - 1)c$ et $\sigma(b) = 2^{a+1}c$.
   (c) Montrer que $c = 1$ et que b est premier.
   (d) En déduire que n est de la forme $2^{k-1}(2^k - 1)$, avec $2^k - 1$ premier.