

Dérivation

Généralités

Autocorrection A. ✓

Dire, en justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

- (i) Si f est une application dérivable en a alors $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ pour h suffisamment petit.
- (ii) Une application f n'est pas dérivable en a si et seulement si $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.
- (iii) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $c \in]a, b[$. L'application f est dérivable si et seulement si $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ le sont.
- (iv) Une application dérivable de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} dont la dérivée est nulle est constante.
- (v) Il existe $f \in D^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et dont la dérivée tend vers 0.
- (vi) Si $f \in D^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ tend vers 0 en $+\infty$, alors f' tend vers 0 en $+\infty$.

Autocorrection B. ✓

Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 1.

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes (on précisera les domaines de définition).

1. $x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$;
2. $x \mapsto (x^2 - 1) \arccos(x^2)$;
3. $x \mapsto x|x|$;
4. $x \mapsto \frac{x}{|x| + 1}$.

Exercice 2.

En quels points la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) x^2$ est-elle dérivable ?

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose f paire et f' périodique. Montrer que f est périodique.

Exercice 4.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère $f_\lambda : x \mapsto \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$ et sa tangente $T_\lambda(a)$ au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les droites $T_\lambda(0)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) sont parallèles.
2. Montrer que les droites $T_\lambda(1)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) sont concourantes.

Exercice 5. 💡 ✓

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. À quelle condition la fonction

$$g : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ f(2x - 1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est-elle dérivable sur $[0, 1]$?

Exercice 6⁺ ✓

Soit $f, g \in D^1(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\max(f, g)$ soit dérivable en x_0 .

Exercice 7 _____

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On note $\sigma_{[f,a]} : x \mapsto \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$.

1. Montrer que si f est dérivable en a , la fonction $\sigma_{[f,a]}$ admet une limite finie en a (et la préciser).
2. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

Exercice 8 ✓

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en a .

Montrer que $x \mapsto \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ admet une limite en a , et la préciser.

Exercice 9⁺ _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 , et $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ h \mapsto \frac{f(2h) - f(h)}{h} \end{cases}$.

Montrer que g possède une limite en 0 si et seulement si f est dérivable à droite en 0 (et, dans ce cas, donner une relation entre $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ et $f'_d(0)$).

Exercice 10⁺ 💡

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable à droite en 0 , et telle que $f(0) = 0$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 11⁺ ✓

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note S sa limite.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et nulle en 0 .

Calculer la limite de $\left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en fonction de S et $f'(0)$.

3. En utilisant la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, calculer S .

Exercice 12⁺ (Équation fonctionnelle de Cauchy : le cas dérivable) 💡

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 13⁺ ✓

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(2x) = 2f(x)$.

Extrema

Autocorrection C.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, admettant un minimum local en 0. Que peut-on dire de $f'(0)$?

Exercice 14.

Déterminer $\max \left\{ n^{1/n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 15.

Déterminer tous les extrema locaux de

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-1/|x|} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Théorèmes de Rolle, des accroissements finis et de la limite de la dérivée

Autocorrection D.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Exercice 16⁺.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer par un exemple que cela n'implique pas $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
2. Montrer qu'il existe une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f'(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 17.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable admettant une même limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en $\pm\infty$.

On veut montrer que f' possède (au moins) un zéro sur \mathbb{R} .

Première méthode. Posons

$$\varphi : \begin{cases} \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(\tan(x)). \end{cases}$$

1. Montrer que φ est dérivable.
2. Montrer que φ admet un prolongement continu $\tilde{\varphi} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\exists c \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[: \varphi'(c) = 0$.
4. En déduire que f' possède (au moins) un zéro sur \mathbb{R} .

Deuxième méthode. Montrer qu'il existe deux réels $x_- < x_+$ tels que $f(x_-) = f(x_+)$ et conclure.

Exercice 18⁺.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain $a \neq 0$.

Montrer qu'il existe un point ($\neq (0, 0)$) sur le graphe de f en lequel la tangente passe par $(0, 0)$.

Exercice 19⁺.

Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 20⁺⁺.

Soit P un polynôme tel que l'équation $P(x) = \cos(x)$ possède une infinité de solutions.

Montrer que P est constant.

Exercice 21.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 22 (Une autre démonstration du théorème de Darboux).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable dont la dérivée ne s'annule pas.

1. Montrer qu'elle est injective.
2. En déduire que f' ne change pas de signe.
3. Démontrer le théorème de Darboux.

Exercice 23⁺ (Théorème de Darboux, démonstration topologique).

Soit $f \in D^1(\mathbb{R})$ et I un intervalle. On définit $J = \left\{ \frac{f(a) - f(b)}{b - a} \mid a < b \in I \right\}$ et $K = \{f'(x) \mid x \in I\}$.

1. Montrer $J \subseteq K \subseteq \bar{J}$.
2. En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Darboux.

Exercice 24⁺.

1. Soit f dérivable telle que $xf'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
2. Peut-on trouver f telle que $xf'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$?

Exercice 25.

Soit $f \in D^1([a, b]; \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) > 0$.

Montrer que f' prend au moins une valeur strictement négative sur $[a, b]$.

Exercice 26⁺.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) f'(x) \geq 0$. Montrer que l'ensemble des points où f ne s'annule pas est un intervalle de la forme $]T, +\infty[$, avec $T \in \bar{\mathbb{R}}$.

Exercice 27.

1. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.
2. En déduire les limites de $\left(\frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 28.

Déterminer la limite éventuelle de $x \mapsto (x+1)e^{1/(x+1)} - xe^{1/x}$ en $+\infty$.

Exercice 29.

1. (a) Dresser le tableau de variations de $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$.
- (b) Montrer que $[0, 1]$ est un intervalle stable sous f et en déduire que f admet un point fixe $\ell \in [0, 1]$.
- (c) Montrer que f est *contractante*, c'est-à-dire c -lipschitzienne pour un certain $c < 1$.
- (d) On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$.

Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2. Reprendre les questions pour la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{e^{v_n}}{v_n + 2}$.

Exercice 30.

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite α -höldérienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Montrer que si I est un intervalle et que $\alpha > 1$, les fonctions α -höldériennes sont constantes.

Exercice 31⁺.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ dérivable sur \mathbb{R}_+^* , de dérivée croissante, et telle que $f(0) = 0$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(x)}{x} \leq f'(x)$.

Exercice 32⁺.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Montrer $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Exercice 33.

Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.

Exercice 34.

Déterminer l'ensemble des points où la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \end{cases}$ est dérivable.

Dérivées supérieures

Exercice 35.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$.
2. Retrouver ce résultat à l'aide de l'exponentielle complexe.

Exercice 36.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$. Montrer que la fonction f est lisse et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(4n-1)}(1) = 0$.

Exercice 37.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $]0, 1[$ par

$$f_0 : x \mapsto \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = x f_n'(x).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n de degré n et à coefficients dans \mathbb{N} telle que $\forall x \in]0, 1[, f_n(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x)^{(n+1)}}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est strictement positive.

Exercice 38⁺.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est lisse sur \mathbb{R}_+^* et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que

$$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n(1/x).$$

2. Montrer que f est lisse sur \mathbb{R} .
3. Soit S un segment non trivial de \mathbb{R} . Montrer qu'il existe $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ non nulle telle que $h|_{\mathbb{R} \setminus S} = 0$.

Exercice 39⁺.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-x^{-2}} \cos(e^{x^{-2}}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$. Quelle est la classe de régularité de f ?

Exercice 40.

Soit $f_1, \dots, f_n \in C^p(\mathbb{R})$. Montrer que $f_1 \cdots f_n \in C^p(\mathbb{R})$ et que

$$(f_1 \cdots f_n)^{(p)} = \sum_{k_1 + \dots + k_n = p} \frac{p!}{k_1! \cdots k_n!} f_1^{(k_1)} \cdots f_n^{(k_n)}.$$

Exercice 41.

Soit $f \in C^n(\mathbb{R}_+^*)$ et $g : x \mapsto f(1/x)$. Montrer que $g \in C^n(\mathbb{R}_+^*)$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-p)}{x^{2n-p}} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 42.

Prolonger par continuité si besoin chacune des fonctions suivantes, puis étudier la classe de la fonction obtenue.

(i) $f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x};$

(iii) $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} \sin x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$

(ii) $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x};$

(iv) $f : x \mapsto \begin{cases} x + a + be^x & \text{si } x \geq 0 \\ \cos x - x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Exercice 43. ☑

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable et déterminer la valeur de $(f^{-1})'(1)$.
3. Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable et donner la valeur de $(f^{-1})''(1)$.

Exercice 44⁺. _____

Soit $f \in D^2(\mathbb{R})$ convergeant en $\pm\infty$.

Donner deux démonstrations (avec et sans le théorème de Darboux) du fait que f'' s'annule.

Exercice 45⁺. ☑

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in D^n(I)$, s'annulant $n + 1$ fois sur I . Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.

Exercice 46⁺. _____

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in D^n(\mathbb{R})$ tels que $f(0) = 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, f^{(k)}(1) = 0$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.

Exercice 47⁺. 💡

Soit $f \in C^2([0, 1])$ telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Mélange

Exercice 48. _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lisse et périodique. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 49⁺. ☑

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x^2)$.

Exercice 50⁺. 💡

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dérivable telle que $f \circ f = f$.

Montrer que f est soit constante, soit égale à l'identité.

Exercice 51⁺⁺. 💡☑

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

1. Si f'' est bornée, montrer $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
2. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse sur f'' ?

Exercice 52⁺. _____

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ positive. Montrer qu'il existe une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f'(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 53⁺ (Nombre de Liouville).



1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n et x une racine de P .

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{C}{b^n}.$$

2. (a) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n 2^{-k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

(b) Montrer que sa limite est un nombre *transcendant*, c'est-à-dire qu'elle n'est racine d'aucun polynôme de $\mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$.

Remarque. C'est historiquement le premier exemple de nombre transcendant (Liouville, 1844).

Exercice 54⁺⁺.



Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n , et $Q = P + P' + \dots + P^{(n)}$.

Montrer que si P est à valeurs positives (c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$), alors Q aussi.

Exercice 55⁺⁺ (Fonction de Bolzano-Lebesgue).

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, en imposant les conditions suivantes :

► $\forall x \in [0, 1], f_0(x) = x$;

► la fonction f_{n+1} est affine sur les 3^{n+1} segments de la famille $\left(\left[\frac{k}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^{n+1}} \right] \right)_{0 \leq k < 3^{n+1}}$ et vérifie

$$\forall j \in \llbracket 0, 3^n - 1 \rrbracket, \begin{cases} f_{n+1} \left(\frac{j}{3^n} \right) = f_n \left(\frac{j}{3^n} \right) \\ f_{n+1} \left(\frac{j}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) = f_n \left(\frac{j}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} \right) \\ f_{n+1} \left(\frac{j}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} \right) = f_n \left(\frac{j}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) \\ f_{n+1}(1) = 1. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe des fonctions f_0, f_1 et f_2 .

2. Soit $x \in [0, 1]$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $a_n \in \llbracket 0, 3^n - 1 \rrbracket$ vérifiant $\frac{a_n}{3^n} \leq x \leq \frac{a_n + 1}{3^n}$.

(b) En déduire la convergence de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

On note $f(x)$ sa limite, ce qui définit une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

3. (a) Montrer : $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f(x)| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n$.

(b) En déduire que f est continue.

4. (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction $(f_n)_{|[0, 3^{-n}]}$, puis la valeur $f(3^{-n})$.

(b) En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

(c) Adapter la démonstration pour montrer que f n'est dérivable en aucun point de l'ensemble $\{k3^{-n} \mid n \in \mathbb{N}, k \in \llbracket 0, 3^n \rrbracket\}$.

5. (a) Soit $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle, dérivable en un point intérieur a de I .

Soit $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites strictement positives convergeant vers 0.

Montrer que $\left(\frac{h(a + \eta_n) - h(a - \xi_n)}{\xi_n + \eta_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

(b) Achever la démonstration du fait que la fonction f n'est dérivable en aucun point de $[0, 1]$.