Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

Exercice 1.

On définit sur $\mathbb{R}^2$ les opérations $+$ et $\cdot$ par

- Pour (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$.

Ces lois munissent-elles $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel ?

Exercice 2.

On définit sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ les opérations $+$ et $\cdot$ par

- Pour (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $(x, y) + (x', y') = (x\,x', y + y')$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\lambda \cdot (x, y) = (x^\lambda, \lambda b)$.

Ces lois munissent-elles $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ d'une structure d'espace vectoriel ?

Exercice 3^+.

Munir $]-1, 1[^n$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Familles de vecteurs

Autocorrection A.

1. Le vecteur $(3, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(2, 1, 0)$?
2. Le vecteur $(3, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(1, 1, 1)$?
3. La fonction $(x \mapsto \cos(2x)) \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ est-elle combinaison linéaire des fonctions cos et sin ?
4. Quelles suites sont combinaisons linéaires des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$?

Autocorrection B.

Voici une liste de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donnés soit comme sous-espace vectoriel engendré par une famille libre, soit comme ensemble de vecteurs vérifiant une ou deux équations linéaires. Pour chacun d'entre eux, donner une description de l'autre type.

(i) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y - z = 0\right\}$;

(ii) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -2x + 2y - 3z = 0\right\}$;

(iii) $\mathrm{Vect}\left((1, 2, -1), (2, 3, -3)\right)$;

(iv) $\mathrm{Vect}\left((1, 1, 1), (1, -1, 0)\right)$;

(v) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 2x + y - z = 0\right\}$;

(vi) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2z = x + 3y - 2z = 0\right\}$;

(vii) $\mathrm{Vect}(1, 2, -1)$;

(viii) $\mathrm{Vect}(2, 3, -3)$.

Autocorrection C. ☑

On définit $a = (-1, 2, 1)$, $b = (0, 1, -1)$, $u = (1, 0, -3)$ et $v = (-2, 5, 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\text{Vect}(a, b)$.
2. Montrer que $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(u, v)$.
3. Trouver trois réels α, β et γ non tous nuls tels que $\forall (x, y, z) \in \text{Vect}(a, b), \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.
4. Montrer que $\text{Vect}(a, b) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \right\}$.

Exercice 4.

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que l'on a $\text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}) = \text{Vect}(\exp, x \mapsto \exp(-x))$.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, montrer que le sous-espace vectoriel $\text{Vect}\left(x \mapsto \cos(2x), \cos^2, \sin^2\right)$ peut s'obtenir comme $\text{Vect}(f, g)$, pour deux fonctions $f, g \in \mathbb{R}^{[-1,1]}$ bien choisies.

Exercice 5.

1. Soit $A \in M_2(K)$. Montrer que $A^2 \in \text{Vect}(I_2, A)$.
2. Donner un exemple de matrice $A \in M_3(K)$ telle que $A^2 \notin \text{Vect}(I_3, A)$.

Familles libres, génératrices, bases

Autocorrection D. ☑

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune des questions suivantes, indiquez ce qu'il faudrait vérifier pour répondre à la question, sous la forme :

Il s'agit de
- *montrer que le système* $\begin{cases} \cdots = \cdots \\ \cdots = \cdots \end{cases}$ *a des solutions / a une unique solution / n'a pas de solution.*
- *trouver toutes les solutions du système* $\begin{cases} \cdots = \cdots \\ \cdots = \cdots \end{cases}$
- *... (liste non exhaustive).*

On ne cherchera pas à faire les calculs.

(i) Montrer que la famille (a, b, c) est libre.
(ii) Montrer que $e \notin \text{Vect}(c, f)$.
(iii) Montrer que (d, e, f) est génératrice.
(iv) Montrer que $\text{Vect}(d, g) \subseteq \text{Vect}(a, b, f)$.
(v) Déterminer toutes les relations de liaison entre a, b, c et d.

Autocorrection E.

1. Montrer que $((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $(3,7,-2)$ dans cette base.
2. On définit $F = \mathrm{Vect}((1,-1,1),(0,-1,2),(1,-2,3)) \subseteq \mathbb{K}^3$. En donner une base et montrer que $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, x+2y+z=0\right\}$.
3. Donner une base de $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, x-y+2z=0\right\}$.
4. Donner une base de $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, 3x-2y+z-2t=0 \text{ et } 2x+y=0\right\}$.

Exercice 6.

Soit $n \geqslant 2$. Soit E un espace vectoriel de base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Montrer que la famille $(e_1+e_2, e_2+e_3, \dots, e_{n-1}+e_n)$ est libre.

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel possédant une famille libre $(e_1, \dots, e_n)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

On note $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ et, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = u + e_i$.

Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i = -1$.

Exercice 8.

1. Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.
2. Montrer que les fonctions cos, sin et exp sont linéairement indépendantes.

Exercice 9$^+$.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\left(\cos^n\right)_{n=0}^{N}$ est libre.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}\left(\left(\cos^n\right)_{n=0}^{N}\right) = \mathrm{Vect}\left(\left(x \mapsto \cos(nx)\right)_{n=0}^{N}\right)$.
3. En déduire que $\left(x \mapsto \cos(nx)\right)_{n=0}^{N}$ est libre.

Exercice 10$^+$.

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels distincts.

1. Montrer que la famille $\left(x \mapsto e^{\alpha_i x}\right)_{i=1}^{n}$ est libre.
2. Montrer que la famille $\left(x \mapsto |x-\alpha|\right)_{i=1}^{n}$ est libre.

Exercice 11.

Construire une famille libre infinie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 12.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. À quelle condition la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle liée ?

Exercice 13.

Peut-on trouver une base de $M_n(\mathbb{R})$ composée de matrices inversibles ?

Sous-espaces vectoriels

Autocorrection F.

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(i) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x=y\right\}$;

(ii) $\left\{(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2 \,\middle|\, x=y\right\}$;

(iii) $\{(x,y)\in(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-) \mid x=y\}$;

(iv) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x|=|y|\right\}$;

(v) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\geqslant y\right\}$;

(vi) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+y=0\right\}$;

(vii) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+y=1\right\}$;

(viii) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2=1\right\}$;

(ix) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2=0\right\}$;

(x) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\geqslant 0\right\}$.

Autocorrection G.

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(i) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x+3y+4z=0\right\}$;

(ii) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+2y-z+1=0\right\}$;

(iii) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x=2y=4z\right\}$;

(iv) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} x+2y-z=0\\ 2x+y-3z=0\end{array}\right\}$;

(v) $\{(x,2x,3x) \mid x\in\mathbb{R}\}$;

(vi) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, xyz=0\right\}$.

Exercice 14.

Soit $n\geqslant 2$. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^n$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(i) $\{(0,0,\ldots,0)\}$;

(ii) $\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i=0\right\}$;

(iii) $\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i=1\right\}$;

(iv) $\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n 2^i x_i=0\right\}$;

(v) l'ensemble des n-uplets ayant au plus une coordonnée non nulle ;

(vi) $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 15.

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(i) l'ensemble des suites croissantes ;

(ii) l'ensemble des suites monotones ;

(iii) l'ensemble des suites minorées ;

(iv) l'ensemble des suites bornées ;

(v) l'ensemble des suites convergentes ;

(vi) l'ensemble des suites divergentes ;

(vii) l'ensemble des suites convergeant vers 0 ;

(viii) l'ensemble des suites convergeant vers 1 ;

(ix) l'ensemble des suites constantes ;

(x) l'ensemble des suites stationnaires ;

(xi) l'ensemble des suites 12-périodiques ;

(xii) l'ensemble des suites périodiques.

Exercice 16.

Les parties suivantes de $\mathbb{R}[X]$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ? ($P\in\mathbb{R}[X]$ et $n\in\mathbb{N}$ sont fixés.)

(i) l'ensemble des polynômes de degré n ;

(ii) l'ensemble des polynômes admettant 0 et 1 comme racines ;

(iii) l'ensemble des polynômes admettant au moins deux racines ;

(iv) $\{PQ \mid Q\in\mathbb{R}[X]\}$;

(v) $\{Q\in\mathbb{R}[X] \mid \exists R\in\mathbb{R}[X] : QR=P\}$.

Exercice 17.

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ? ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ étant fixés.)

(i) l'ensemble des fonctions croissantes ;
(ii) l'ensemble des fonctions monotones ;
(iii) l'ensemble des fonctions qui s'écrivent comme différence de deux fonctions croissantes ;
(iv) $\left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivables} \,\middle|\, f(0) + f(1) = f'(0)\right\}$;
(v) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x_0) = y_0\}$;
(vi) $\{x \mapsto A\cos(x + \varphi) \mid A, \varphi \in \mathbb{R}\}$;
(vii) l'ensemble des fonctions ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Exercice 18.

Soit $E \subseteq K^n$ un sous-espace vectoriel tel que $\forall x \in E \setminus \{0\}, \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \neq 0$.

Montrer qu'il existe $v \in E$ tel que $E = \mathrm{Vect}(v)$.

Exercice 19⁺.

1. Déterminer $\mathrm{Vect}\left\{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, f \geqslant 0\right\}$.
2. Déterminer $\mathrm{Vect}\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0\}$.

Exercice 20⁺.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Déterminer $\mathrm{Vect}(E \setminus F)$.

Exercice 21⁺.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F, G \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels.

Montrer que $F \cup G$ n'est un sous-espace vectoriel de E que si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Bases de sous-espaces vectoriels

Exercice 22 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$).

1. Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   Traduire la question « w est-il combinaison linéaire de u et v ? » en termes de systèmes linéaires.
2. Montrer que si u et v ne sont pas colinéaires, alors la famille (u, v) engendre $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire une classification de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 23.

Déterminer si les familles suivantes sont des bases de $K_2[X]$ et, le cas échéant, déterminer les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans cette base.

(i) $(1, X - 1, (X - 1))^2$;
(ii) $(X^2 + X, X^2 + 1, X + 1)$;
(iii) $((X - 1)^2, X^2, (X + 1)^2)$.

Exercice 24⁺.

Soit $a \neq b \in \mathbb{C}$. Montrer que $\left((X - a)^k (X - b)^{n-k}\right)_{k \in [\![0, n]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 25⁺.

1. Soit E un espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille génératrice de E. Notons
$$J = \left\{ j \in [\![1, p]\!] \,\middle|\, x_j \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{j-1}) \right\}.$$
Montrer que $(x_j)_{i \in J}$ est une base de E.
2. On considère la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et le sous-espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. En utilisant la question précédente, donner une base de V.

Exercice 26.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1} \in \mathbb{K}_n[X]$.

Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 27⁺.

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.

1. Montrer qu'il existe une base de E constituée de polynômes de degrés tous différents.
2. Montrer qu'il existe une base de E constituée de polynômes de même degré.

Sommes et intersections

Autocorrection H.

On définit les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}\left((1,1,0), (0,1,1)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 28.

Soit $n \geqslant 2$. On note $F = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 29.

On définit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x - y + z - t = 0 \right\}, \quad F = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + z = y + t = 0 \right\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 30.

Montrer que $\left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \,\middle|\, P(X^2) = X^2 P(X) \right\}$ et $\left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \,\middle|\, P(1) = P(2) \right\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 31.

1. Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
2. Soit E l'ensemble des fonctions dérivables en 0. Montrer que $F = \left\{ f \in E \,\middle|\, f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 0 \right\}$ et l'ensemble des fonctions affines sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Généraliser.

Exercice 32.

Soit $E = C^0(\mathbb{R})$. Montrer que

$$E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin) \oplus \left\{ f \in E \,\middle|\, f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) \right\}.$$

Exercice 33.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,\middle|\, f(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^n) \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$, et en trouver un supplémentaire.

Exercice 34.

Soit A, B et C trois parties d'un espace vectoriel E.

1. Comparer $\mathrm{Vect}(B \cup C)$ et $\mathrm{Vect}(B) + \mathrm{Vect}(C)$.
2. Comparer $\mathrm{Vect}(A)$ et $\mathrm{Vect}(A \cup B) \cap \mathrm{Vect}(A \cup C)$.

Exercice 35.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A, B, C \subseteq E$ trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer les propriétés suivantes.

1. $A \cap B = A + B \Leftrightarrow A = B$.
2. $(A \cap B) + (A \cap C) \subseteq A \cap (B + C)$. Montrer que l'inclusion peut être stricte.
3. $B \subseteq A \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + C)$.

Exercice 36. ☑

Soit F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $(F \cap G) \oplus H = G$.

Montrer que $F + G = F \oplus H$.

Exercice 37$^+$.

Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F+H = G+H$, $F \cap H = G \cap H$, et $F \subseteq G$. Montrer qu'alors $F = G$.

Montrer que la conclusion ne tient pas si l'on omet la troisième hypothèse.