

Applications linéaires

Exemples

Autocorrection A.



Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- | | |
|--|--|
| (i) $\begin{cases} \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) \mapsto xy \end{cases}$ | (x) $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P(X^2) \end{cases}$ |
| (ii) $\begin{cases} \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^3 \\ (x, y) \mapsto (1+x, 2x, y) \end{cases}$ | (xi) $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P(X)^2 \end{cases}$ |
| (iii) $\begin{cases} \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x-3z, 2x+y) \end{cases}$ | (xii) $\begin{cases} \mathbb{C}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f'' - 2f' + f \end{cases}$ |
| (iv) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x+1 \end{cases}$ | (xiii) $\begin{cases} \mathbb{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(1) + f(-1) \end{cases}$ |
| (v) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$ | (xiv) $\begin{cases} \mathbb{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f^2 + 2f \end{cases}$ |
| (vi) $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$ | (xv) $\begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{cases}$ |
| (vii) $\begin{cases} \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2 \end{cases}$ | (xvi) $\begin{cases} \mathbb{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 f^2 \end{cases}$ |
| (viii) $\begin{cases} \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (y, x, x+y) \end{cases}$ | (xvii) $\begin{cases} \mathbb{C}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f^{(n)} \end{cases} \text{ (où } n \in \mathbb{N}^*)$ |
| (ix) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \min(x, y) \end{cases}$ | |
| (xviii) $\begin{cases} \left\{ f \in \mathbb{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \mid f \text{ converge en } \pm\infty \right\} \rightarrow \mathbb{C} \\ f \mapsto \lim_{+\infty} f - \lim_{-\infty} f. \end{cases}$ | |

Exercice 1.



1. Déterminer toutes les applications \mathbb{K} -linéaires $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$.
2. Plus généralement, montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) = \{ \varphi_A \mid A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \}$, où φ_A désigne l'application linéaire canoniquement associée à A .
3. En déduire que les espaces vectoriels $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes.

Exercice 2.

Soit $E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = 0 \right\}$ et

$$\Delta : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}. \end{cases}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et que Δ est un isomorphisme.

Exercice 3. ✓

Soit $a \in K$.

Montrer que $E_a = \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $K[X]$, isomorphe à $K[X]$.

Exercice 4. ✓

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g - g \circ f = f$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n.$$

Exercice 5⁺. 💡

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est *nilpotent* si $\exists n \in \mathbb{N}^* : f^n = 0$.

Montrer que dans ce cas, $\text{id}_E - f$ est un automorphisme et donner une expression de son inverse.

Noyaux et images, injectivité, surjectivité

Exemples

Autocorrection B. ✓

Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leurs noyaux et images.

- | | |
|--|---|
| (i) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + 2y, -2x - 4y) \end{cases}$ | (iii) $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x - 2y, x + 2z) \end{cases}$ |
| (ii) $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, 2x - z, x - y + z) \end{cases}$ | (iv) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x - 2y, x + 2y) \end{cases}$ |

Autocorrection C. ✓

Soit $n \geq 1$ un entier et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que

$$T_n : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P'' + \omega^2 P \end{cases}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. En calculant $T_n(1), T_n(X), T_n(X^2), \dots, T_n(X^n)$, montrer que T_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Montrer que l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = x^n$ possède une unique solution polynomiale, dont on déterminera le degré.

Exercice 6. ✓

1. Montrer que

$$\Delta : \begin{cases} K[X] \rightarrow K[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

est un endomorphisme de $K[X]$.

2. Montrer que $\ker \Delta = K_0[X]$.

3. En calculant l'image par Δ de la base canonique, déterminer $\text{im } \Delta$.

4. Trouver un sous-espace vectoriel E de $K[X]$ tel que Δ induise un isomorphisme $E \rightarrow K[X]$.

Exercice 7.

Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(2X) - P(X) \end{cases}$ est linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 8.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner une base de $\ker u$, $\ker(u - 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\ker(u + 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})$.
2. En déduire $\ker u \oplus \ker(u - 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(u + 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $E = \ker(u - 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(u + 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})$ est stable sous u et que u induit un automorphisme de E .

Exercice 9⁺⁺.

1. Existe-t-il $T \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}))$ tel que $T \circ T$ soit l'opérateur de dérivation D ?
2. Même question pour $C^\infty(\mathbb{R}^*)$.

Plus formel**Autocorrection D.**

Soit E et F deux espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Montrer que $f[E_1] \subseteq f[E_2]$ si et seulement si $E_1 + \ker f \subseteq E_2 + \ker f$.

Exercice 10.

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont stables par g .

Exercice 11.

Soit E, F et G trois espaces vectoriels et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$.

Montrer que $g \circ f$ est nulle si et seulement si $\operatorname{im} f \subseteq \ker g$.

Exercice 12.

Soit E, F et G trois espaces vectoriels et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que l'on a $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$ et que

$$\ker(f) = \ker(g \circ f) \Leftrightarrow \operatorname{im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}.$$

2. Montrer que l'on a $\operatorname{im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{im}(g)$ et que

$$\operatorname{im}(g \circ f) = \operatorname{im}(g) \Leftrightarrow \operatorname{im}(f) + \ker(g) = F.$$

3. Comment exprimer en général $\ker(g \circ f)$ en fonction de f et $\ker g$?

De même, comment exprimer $\operatorname{im}(g \circ f)$ en fonction de g et $\operatorname{im} f$?

Exercice 13.

Soit E un espace vectoriel, $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Exprimer $f^{-1}[f[F]]$ en fonction de F et $\ker f$.
2. Exprimer $f[f^{-1}[F]]$ en fonction de F et $\operatorname{im} f$.
3. À quelle condition a-t-on $f[f^{-1}[F]] = f^{-1}[f[F]]$?

Exercice 14. ✓

Soit E, F deux espaces vectoriels, S_1, S_2 deux sous-espaces vectoriels de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que $u[S_1 + S_2] = u[S_1] + u[S_2]$.
2. On suppose u injective et S_1 et S_2 en somme directe. Montrer que $u[S_1 \oplus S_2] = u[S_1] \oplus u[S_2]$.
3. Montrer que l'on ne peut pas se passer de l'hypothèse d'injectivité dans la question précédente.

Exercice 15. ✓

Soit $(x_i)_{i=1}^n$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Montrer que $(u(x_i))_{i=1}^n$ est libre si et seulement si $(x_i)_{i=1}^n$ est libre et que $\ker f$ et $\text{Vect}(x_i)_{i=1}^n$ sont en somme directe.

Exercice 16⁺. ✓

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que si $\text{im}(f + g) = \text{im } f \oplus \text{im } g$, alors $E = \ker f + \ker g$.

Exercice 17. ✓

Soit E un K -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, K)$.

1. Montrer que si l'application linéaire f n'est pas nulle, elle est surjective.
2. On suppose f non nulle et on fixe $u_0 \in E$ tel que $f(u_0) \neq 0$. Montrer que $E = \ker f \oplus \text{Vect}(u_0)$.
3. On note $\mathfrak{sl}_n(K) = \{M \in M_n(K) \mid \text{tr } M = 0\}$. Trouver un supplémentaire de $\mathfrak{sl}_n(K)$ dans $M_n(K)$.

Exercice 18. ✓

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, K)$ deux applications linéaires non nulles.

Montrer que $\exists \lambda \in K : g = \lambda f$ si et seulement si $\ker f = \ker g$.

Exercice 19. ✓

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^7 = f$. Montrer que

$$E = \ker f \oplus \text{im } f.$$

Exercice 20. ✓

Soit E un espace vectoriel, $\alpha \neq \beta$ deux scalaires et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$(f - \alpha \text{id}_E) \circ (f - \beta \text{id}_E) = 0. \quad (\star)$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $a(f - \alpha \text{id}_E) + b(f - \beta \text{id}_E) = \text{id}_E$.
2. En déduire que $E = \text{im}(f - \alpha \text{id}_E) + \text{im}(f - \beta \text{id}_E)$.
3. Déduire de (\star) que $\text{im}(f - \beta \text{id}_E) \subseteq \ker(f - \alpha \text{id}_E)$ et que $\text{im}(f - \alpha \text{id}_E) \subseteq \ker(f - \beta \text{id}_E)$.
4. Montrer que $E = \ker(f - \alpha \text{id}_E) \oplus \ker(f - \beta \text{id}_E)$.

Exercice 21⁺. ✓

Soit E et F des espaces vectoriels tels que $E = G \oplus H$. Soit $A = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid G \subseteq \ker u\}$.

Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{L}(H, F)$.

Exercice 22⁺.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E .

Pour toute application $f \in \mathcal{L}(F, G)$, on considère $V_f = \{x + f(x) \mid x \in F\}$.

1. Soit S un supplémentaire de G . Montrer que $\forall x \in F, \exists ! y \in G : x + y \in S$.
2. Montrer que tout supplémentaire de G est de la forme V_f , pour un unique $f \in \mathcal{L}(F, G)$.
3. En déduire que tous les supplémentaires de G sont isomorphes.

L'exercice le plus classique de l'univers

Exercice 23⁺ (Caractérisation des homothéties).



Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que, pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $u(x)$ soient colinéaires.

Montrer que u est une homothétie.

Projecteurs et symétries

Autocorrection E.



Dans \mathbb{R}^3 , on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 3))$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Déterminer la projection sur F parallèlement à G de $(2, 2, 3)$.
3. Déterminer la projection sur G parallèlement à F de $(1, -2, 0)$.

Autocorrection F.



Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ 4x - y \\ -2x + 2y + 3z \end{pmatrix} \end{cases}$.

1. Identifier la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que f soit canoniquement associée à A .
2. Calculer A^2 et en déduire f^2 .
3. Montrer que $\frac{1}{3}f$ est une symétrie.
4. En déduire que $f \in GL(\mathbb{R}^3)$ et exprimer f^{-1} en fonction de f .

Exercice 24.

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes.

1. On suppose que g est un projecteur et que $\ker g$ et $\text{im } g$ sont stables sous f .

Montrer que f et g commutent.

2. Donner un contre-exemple à la question précédente si on ne suppose plus que g est un projecteur.

Exercice 25.

Soit E un espace vectoriel et $S_1, S_2 \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. On note p_1 (resp. p_2) le projecteur sur S_1 (resp. S_2) parallèlement à S_2 (resp. S_1) et s_1 (resp. s_2) la symétrie d'axe S_1 parallèlement à S_2 (resp. S_1). Montrer les égalités suivantes.

- | | |
|--|---|
| (i) $p_1 + p_2 = \text{id}_E$; | (iii) $s_1 + s_2 = 0$; |
| (ii) $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$; | (iv) $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1 = -\text{id}_E$. |

Exercice 26.

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E .

1. Montrer que si p et q commutent, alors $p \circ q$ est un projecteur de E .
2. Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$ et que dans ce cas, on a $\text{im}(p + q) = \text{im } p \oplus \text{im } q$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 27.

Soit E un espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes tels que $p + q = \text{id}_E$ et $p \circ q = 0$.

1. Montrer que p et q sont des projecteurs et que $q \circ p = 0$.
2. Montrer que $\text{im } p = \ker q$ et $\text{im } q = \ker p$.

Exercice 28⁺.



Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que si $p \circ q + q \circ p = 0$, alors $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. En déduire que $p - q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = q$.

Exercice 29.



Soit p et q des projecteurs de E tels que $pq = 0$. On note $r = p + q - q \circ p$.

1. Montrer que r est un projecteur.
2. Montrer que $\text{im } p$ et $\text{im } q$ sont en somme directe, puis que $F = \text{im } p \oplus \text{im } q$ et $G = \ker p \cap \ker q$ sont supplémentaires.
3. Montrer que r est le projecteur sur F parallèlement à G .

Exercice 30⁺⁺⁺.

Soit u et v deux symétries d'un espace vectoriel réel E .

1. Montrer que $\ker(uv - vu) = \ker(u + v) \oplus \ker(u - v)$.
2. Montrer que $\text{im}(uv - vu) = \text{im}(u + v) \cap \text{im}(u - v)$.

Mélange

Exercice 31⁺.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes tels que $u \circ v = v \circ u$ et $\ker u \cap \ker v = \{0_E\}$.

Montrer que $\forall i, j \in \mathbb{N}, \ker(u^i) \cap \ker(v^j) = \{0\}$.

Exercice 32⁺ (Pseudo-inverse d'Azumaya-Drazin). 💡☑

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que $g \in \mathcal{L}(E)$ est un *pseudo-inverse* de f si $f \circ g = g \circ f$, $f \circ g \circ f = f$, et $g \circ f \circ g = g$.

L'endomorphisme f est dit *pseudo-inversible* s'il admet un pseudo-inverse.

1. Montrer que si f est pseudo-inversible, il admet un unique pseudo-inverse. On le notera f^\sharp .
2. Montrer que si f est inversible (resp. est un projecteur), alors il est pseudo-inversible, et déterminer son pseudo-inverse f^\sharp .
3. Plus généralement, on suppose $\ker f \oplus \operatorname{im} f = E$. Montrer que f est pseudo-inversible.
4. Le but de cette question est de montrer la réciproque de la question précédente.

On suppose f pseudo-inversible.

- (a) Montrer que $f \circ f^\sharp$ est un projecteur, de noyau $\ker f^\sharp$ et d'image $\operatorname{im} f$. Qu'en déduit-on?
 - (b) Montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.
5. Montrer que f est pseudo-inversible si et seulement si $\ker(f) = \ker(f^2)$ et $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2)$.

Exercice 33⁺.

On note c le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\operatorname{év}_n : c \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire associant à toute suite convergente $u \in c$ son élément u_n .

Par abus de notation, on note également $\operatorname{év}_\infty : c \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire associant à toute suite convergente $u \in c$ sa limite.

Montrer que la famille $(\operatorname{év}_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ est libre.

Exercice 34⁺⁺.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que pour toute suite u , $\varphi(u)$ soit une valeur prise par u .

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi = \operatorname{év}_n : u \mapsto u_n$.