Dimension

Généralités

Autocorrection A.

1. Donner une base de $\mathrm{Vect}\left((1,-1,1),(0,-1,2),(1,-2,3)\right)$.
2. En déduire que $\mathrm{Vect}\left((1,-1,1),(0,-1,2),(1,-2,3)\right) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, x+2y+z=0\right\}$.

Autocorrection B.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On définit $D_t = \mathrm{Vect}(t,t,1)$ et $P_t = \mathrm{Vect}\left((1,t,1),(2,1,1)\right)$.

1. Montrer que D_t et P_t sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera la dimension.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $t \in \mathbb{R}$ pour que l'on ait $D_t \oplus P_t = \mathbb{R}^3$.

Exercice 1.

Donner une base et la dimension des espaces vectoriels suivants.

(i) $E = \mathrm{Vect}\left((1,2,1,0),(4,-2,1,1),(7,2,4,2),(11,4,1,3)\right)$;

(ii) $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, 3x-2y-z+2t=0 \text{ et } 3y-2z+t=0\right\}$.

Exercice 2.

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. Montrer que $(e_2,\ldots,e_n)$ est libre.

Exercice 3.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on définit

$$u_k = (k, k-1, \ldots, 2, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n.$$

Montrer que $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 4.

Soit $n \geqslant 1$. Rappeler la dimension de $M_n(\mathbb{K})$. Déterminer les dimensions :

(i) de l'espace $D_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales ;

(ii) de l'espace $T_n^+(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures ;

(iii) de l'espace $T_n^-(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures ;

(iv) de l'espace $S_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques ;

(v) de l'espace $A_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques ;

(vi) de l'espace $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \ker \mathrm{tr}$.

Sous-espaces vectoriels

Autocorrection C.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P} = \{P \in K_{2n}[X] \mid P(-X) = P(X)\}$ et $\mathcal{I} = \{P \in K_{2n}[X] \mid P(-X) = -P(X)\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $K_{2n}[X]$.
2. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont en somme directe.
3. En exhibant des familles libres explicites, montrer que $\dim \mathcal{P} \geqslant n+1$ et $\dim \mathcal{I} \geqslant n$.
4. En faisant le moins de calculs possibles, montrer que les inégalités de la question précédente sont des égalités, et en déduire une base de $\mathcal{P}$, une base de $\mathcal{I}$, et une démonstration du fait que $K_{2n}[X] = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice 5.

1. Soit E un sous-espace vectoriel de K^n. Montrer qu'il existe une sous-famille $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ de la base canonique telle que E et $\mathrm{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ soient supplémentaires.
2. Déterminer un supplémentaire de $\left\{(x, y, z, t) \in K^4 \,\middle|\, x - y - z + t = 0 \text{ et } y - 2z + t = 0\right\}$.

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel et $x_1, \dots x_n, y_1, \dots, y_n \in E$.

On suppose la famille $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ libre. En déduire que $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, x_n) \geqslant n$.

Exercice 7.

Soit V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E.

On suppose $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$. Montrer que $V_1 \subseteq V_2$ ou $V_2 \subseteq V_1$.

Exercice 8.

1. Soit A, B et C trois parties finies d'un ensemble Ω. Montrer que
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| .$$
2. Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. A-t-on
$$\begin{aligned} \dim(F + G + H) = {} & \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) \\ & - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H) \ ? \end{aligned}$$

Exercice 9.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > \dim E$, alors F et G ne peuvent pas être en somme directe.
2. Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. Donner une condition sur $\dim F + \dim G + \dim H$ garantissant que l'intersection $F \cap G \cap H$ soit non triviale.

Exercice 10$^+$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $p, q \in [\![0, n]\!]$. Quelles sont les dimensions possibles pour une intersection $F \cap G$, quand F (resp. G) est un sous-espace vectoriel de E de dimension p (resp. q) ?

Exercice 11$^+$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(F_i)_{i=1}^{n+1}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Montrer qu'il existe $J \subsetneq [\![1, n+1]\!]$ tel que $\displaystyle\sum_{j\in J} F_j = \sum_{i=1}^{n+1} F_i$.

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Soit H et H′ deux hyperplans de E. Montrer que $\dim(H\cap H') \in \{n-1, n-2\}$, et déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\dim(H\cap H') = n-2$.
2. Quelle est la dimension de
$$\left\{(a,b,c,d,e,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^9 \;\middle|\; \begin{array}{l} a-7b+3c-2d+f-g+\sqrt{2}h+42i \quad = 0 \\ a+2b+3c+4d+5e+6f+7g+8h+9i = 0 \end{array}\right\} ?$$
3. Soit $H_1, \dots, H_r$ des hyperplans de E. Montrer que $\dim\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{r} H_i\right) \geqslant n-r$.
4. Soit $v = (2, 1, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$ et $D = \mathrm{Vect}(v)$. Écrire D comme l'intersection de trois hyperplans.

Exercice 13.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $F, G \subseteq E$ deux espaces en somme directe.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $\widehat{F} \supseteq F$ de E tel que $\widehat{F} \oplus G = E$.

Exercice 14.

Montrer que deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes.

Exercice 15$^+$ (Lemme de l'échange de Steinitz).

Soit E un espace vectoriel et $(f_1, \dots, f_m)$ une famille génératrice de E et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E. Pour $r \in [\![1, n]\!]$, on définit l'assertion $P(r)$:

> « il existe des indices $i_1, \dots, i_r$ tous distincts telle que la famille obtenue à partir de $(f_1, \dots, f_m)$ en remplaçant chacun des f_{i_k} par e_k est génératrice. »

1. Montrer par récurrence l'assertion $\forall r \in [\![1, n]\!], P(r)$.
2. Constater que ce résultat redémontre le lemme d'échange de Steinitz, et explique mieux son nom.

Applications linéaires (et théorème du rang)

Autocorrection D.

Soit

$$f : \begin{cases} \quad K^4 & \to \quad K^2 \\ (x,y,z,t) & \mapsto (x-z, y-t) \end{cases}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(K^4, K^2)$.
2. Donner une base et la dimension de $\ker f$.
3. En déduire que f est surjective.
4. Soit $G = \left\{(x,y,z,t) \in K^4 \;\middle|\; y = z = 0\right\}$.

   Montrer que G est un sous-espace vectoriel de K^4, dont on précisera la dimension.
5. Montrer que $\ker f$ et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de K^4.

Exercice 16.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer $\mathrm{im}(f - \mathrm{id}_E) \subseteq \ker(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$;
2. Montrer que $\mathrm{im}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires.

Exercice 17.

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $E = \ker u \oplus \mathrm{im}\, u$ si et seulement si $\mathrm{im}\, u^2 = \mathrm{im}\, u$ et $\ker u^2 = \ker u$.
2. On suppose E de dimension finie, montrer que
$$E = \ker u \oplus \mathrm{im}\, u \Leftrightarrow \mathrm{im}\, u^2 = \mathrm{im}\, u \Leftrightarrow \ker u^2 = \ker u.$$
3. L'équivalence $\mathrm{im}\, u^2 = \mathrm{im}\, u \Leftrightarrow \ker u^2 = \ker u$ est-elle valable en dimension infinie ?

Exercice 18.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\ker u + \ker v = \mathrm{im}\, u + \mathrm{im}\, v = E$. Montrer que les deux sommes sont directes.
2. Montrer par un contre-exemple que la question précédente cesse d'être vraie si l'on ne suppose plus E de dimension finie.

Exercice 19.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in K[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$.

Exercice 20.

On considère une suite d'applications linéaires
$$\{0\} \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_3 \longrightarrow \cdots E_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} E_r \xrightarrow{f_r} \{0\}$$
supposée *exacte*, c'est-à-dire que l'image de chaque application linéaire est égale au noyau de la suivante. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} (-1)^k \dim E_k = 0$.

Exercice 21.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Soit $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que
$$\dim u[V] = \dim V - \dim (V \cap \ker u).$$
2. Soit $W \subseteq F$ un sous-espace vectoriel. Montrer que
$$\dim u^{-1}[W] = \dim (W \cap \mathrm{im}\, u) + \dim \ker u.$$

Exercice 22.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

   Montrer qu'il existe un espace vectoriel E' et $\varphi \in \mathcal{L}(E', E)$ tel que $F = \operatorname{im} \varphi$.
2. Soit G un sous-espace vectoriel de E.

   Montrer qu'il existe un espace vectoriel E'' et $\psi \in \mathcal{L}(E, E'')$ tel que $G = \ker \psi$.
3. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

   À quelle condition existe-t-il $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $F = \operatorname{im} u$ et $G = \ker u$?

Exercice 23$^+$.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$;

(ii) il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u = u$ et $u \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$;

(iii) il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

Exercice 24$^+$ (Lemme de factorisation).

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(E, G)$.

Le but de l'exercice est de démontrer que

$$\ker u \subseteq \ker v \Leftrightarrow (\exists w \in \mathcal{L}(F, G) : v = w \circ u)\,.$$

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$. Montrer que $\ker u \subseteq \ker v$.
2. En considérant un supplémentaire S de $\ker u$ dans E et un supplémentaire T de $\operatorname{im} u$ dans F, construire une application linéaire $w \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$.

Exercice 25$^+$.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall x \in V, f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Montrer que f est combinaison linéaire des $f_1, \ldots, f_n$.

Exercice 26$^+$. *X*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{im} f = \ker f \Leftrightarrow \left(f^2 = 0 \text{ et } \exists h \in \mathcal{L}(E) : hf + fh = \mathrm{id}\right).$$

Exercice 27.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u$.

Montrer que u est une homothétie.

Exercice 28^{++}.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

On dit que deux r-uplets $(F_1, \dots, F_r)$ et $(F'_1, \dots, F'_r)$ de sous-espaces vectoriels de E sont *équivalents* s'il existe un automorphisme $\varphi \in GL(E)$ tel que $\forall i \in [\![1, r]\!], \varphi[F_i] = F'_i$.

1. Classer les sous-espaces vectoriels de E à équivalence près.
2. Classer les couples de sous-espaces vectoriels de E à équivalence près.
3. On suppose pour simplifier que E est de dimension paire, et on note $r = \dfrac{1}{2} \dim E$.

   Montrer que les triplets de sous-espaces vectoriels (F_1, F_2, F_3) tels que $\forall i \in [\![1, 3]\!], \dim F_i = r$ et $\forall i \neq j \in [\![1, 3]\!], F_i \cap F_j = \{0_E\}$ sont tous équivalents entre eux.
4. On suppose toujours $\dim E = 2r$. Montrer qu'il existe une infinité de quadruplets de sous-espaces vectoriels (F_1, F_2, F_3, F_4) tels que $\forall i \in [\![1, 4]\!], \dim F_i = r$ et $\forall i \neq j \in [\![1, 4]\!], F_i \cap F_j = \{0_E\}$ deux à deux non équivalents.

Inégalités sur le rang et la dimension

Exercice 29.

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Soit $p \leqslant q$ deux éléments de $[\![1, n]\!]$.

Montrer $0 \leqslant \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_q) - \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) \leqslant q - p$.

Exercice 30.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer $\mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
2. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\ker u + \ker v = E$ et $\mathrm{im}\, u \cap \mathrm{im}\, v = \{0\}$.
3. Montrer $|\mathrm{rg}\, u - \mathrm{rg}\, v| \leqslant \mathrm{rg}(u + v)$.

Exercice 31.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $a, b \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\dim \ker(a \circ b) \leqslant \dim \ker a + \dim \ker b.$$

Exercice 32^{+}.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u_1 \circ \dots \circ u_k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(u_i) \leqslant (k - 1) \dim E$.

Exercice 33^{+}.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $r, s \in [\![0, n]\!]$. Déterminer

$$\mathcal{R}(r, s) = \left\{ \mathrm{rg}(g \circ f) \,\middle|\, (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \mathrm{rg}\, f = r \text{ et } \mathrm{rg}\, g = s \right\}.$$

Exercice 34^{+} (Inégalité de Sylvester).

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

Montrer $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant \mathrm{rg}(v \circ u) + \dim F$.

Formes linéaires, équations

Exercice 35$^+$.

1. **Deux résultats sur les intersections d'hyperplans.** Soit E un espace vectoriel de dimension n.
   (a) On se donne c hyperplans $H_1, \ldots, H_c$ de E. Montrer que $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{c} H_i\right) \geqslant n - c$.
   (b) Donner un exemple où l'inégalité ci-dessus est stricte.
   (c) Réciproquement, soit $c \in [\![0, n]\!]$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - c$.

   Exprimer F comme l'intersection d'exactement c hyperplans de E.
2. **Une application : décroissance de la codimension par image réciproque.** Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, et V un sous-espace vectoriel de F.

   En exprimant V comme une intersection d'hyperplans, montrer l'inégalité
   $$\dim E - \dim u^{-1}[V] \leqslant \dim F - \dim V.$$
3. En utilisant notamment le théorème du rang et la formule de Grassmann, donner une deuxième démonstration de l'inégalité précédente, sans utiliser d'hyperplans.

Exercice 36$^+$.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. Soit $u_0, \ldots, u_d \in E$ tels que $\left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{d} t^i u_i \in F \right\}$ possède au moins $d + 1$ éléments. Montrer que $\forall i \in [\![0, d]\!], u_i \in F$.

Exercice 37$^+$.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et V un sous-espace vectoriel de $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ vérifiant $\forall x_1, x_2 \in E, \exists \varphi \in V : \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Montrer que $V = E^*$.
2. Montrer que le résultat tombe en défaut si E n'est plus supposé de dimension finie.

Espaces de suites, de matrices et de polynômes

Exercice 38$^+$ (Transformée de Fourier discrète).

Soit $T \in \mathbb{N}^*$. On définit l'espace des suites T-périodiques $\mathcal{P}_T = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}_T$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et déterminer $\dim \mathcal{P}_T$.
2. Montrer que $((\omega^n)_{n\in\mathbb{N}})_{\omega\in\mathbb{U}_T}$ est une base de $\mathcal{P}_T$.
3. **Application.**
   (a) Décomposer la suite $\left(\mathbb{1}_{(T|n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base précédente.
   (b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit $S_m = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m \\ T|k}} \binom{m}{k}$. Montrer que $S_m \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{1}{T} 2^m$.

Exercice 39 (Commutant de matrices 2×2).

Dans cet exercice, on fixe une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ et on étudie son *commutant*, c'est-à-dire

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ M \in M_2(K) \,\middle|\, AM = MA \right\}.$$

Plus précisément, on va montrer

$$\mathcal{C}(A) = \begin{cases} M_2(K) & \text{si } A \in \mathrm{Vect}(I_2) \\ \mathrm{Vect}(I_2, A) & \text{sinon.} \end{cases} \qquad (\heartsuit)$$

Généralités.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(K)$.
2. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est stable par produit : $\forall M, N \in \mathcal{C}(A), MN \in \mathcal{C}(A)$.
3. Déterminer $\mathcal{C}(A)$ quand A est une matrice scalaire.
4. En exhibant une famille libre explicite, montrer que $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant 2$.

Un cas particulier. Dans cette partie, on suppose $a \neq d$.

5. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ et $\mathrm{Vect}(E_{1,2}, E_{2,1})$ sont en somme directe.
6. En déduire que $\dim \mathcal{C}(A) = 2$ et $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Fin de l'étude.

7. Soit $P \in GL_2(K)$. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(P^{-1}AP)$ sont isomorphes.
8. On suppose $A \notin T_2^+(K)$. À l'aide de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.
9. Conclure la démonstration du résultat $(\heartsuit)$.

Exercice 40$^+$.

1. On considère un polynôme $P = X^2 + \alpha X + \beta$ admettant deux racines $\rho \neq \sigma \in K$ et on pose

$$\mathcal{R} = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0 \right\}.$$

   Montrer que $\mathcal{R}$ est un plan vectoriel, puis en déduire que $\left((\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ est une base de $\mathcal{R}$.
2. Soit $X^k + \alpha_{k-1} X^{k-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in K[X]$ un polynôme possédant k racines distinctes $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

   En généralisant le raisonnement de la question précédente, montrer que

$$\mathcal{R}' = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} + \alpha_{k-1} u_{n+k-1} + \cdots + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n = 0 \right\}$$

   est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension k et en exhiber une base.

Exercice 41.

Pour tous $d \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, on note

$$E_d(a) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \exists P \in \mathbb{R}_d[X] : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a\, u_n + P(n) \right\}.$$

1. (a) Montrer que, pour tous $d \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, $E_d(a)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (b) Déterminer $E_0(a)$.
2. (a) Montrer qu'en associant à une suite u le polynôme P qui convient, on obtient une application linéaire bien définie $\varphi : E_d(a) \to \mathbb{R}_d[X]$.
   (b) En déduire que $E_d(a)$ est de dimension finie, et calculer cette dimension.
3. Montrer que la restriction de φ à l'espace des suites polynomiales est surjective, et en déduire une base de $E_d(a)$.

Exercice 42$^+$ (Matrices magiques).

Dans tout l'exercice, $n \geqslant 2$. Étant donné une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ et un entier $\ell \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_\ell(A)$ (resp. $\kappa_\ell(A)$) la somme des coefficients de la ℓ-ème ligne (resp. ℓ-ème colonne) de A. On note également $\operatorname{atr}(A) = \sum_{\ell=1}^{n} [A]_{\ell,n+1-\ell}$ la somme des coefficients « antidiagonaux » de A.

1. **Matrices semi-magiques.** On note

$$\begin{aligned} &\mathcal{SM}_n = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \exists m \in \mathbb{R} : \forall \ell \in [\![1, n]\!], \lambda_\ell(A) = \kappa_\ell(A) = m \right\} \\ \text{et} \qquad &\mathcal{SM}_n^\circ = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \forall \ell \in [\![1, n]\!], \lambda_\ell(A) = \kappa_\ell(A) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

   (a) Montrer que $\mathcal{SM}_n$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, et exprimer $\mathcal{SM}_n^\circ$ comme le noyau d'une forme linéaire $\mu : \mathcal{SM}_n \to \mathbb{R}$.
   (b) Construire un isomorphisme $\mathcal{SM}_n^\circ \to M_{n-1}(\mathbb{R})$.
   (c) En déduire les dimensions de $\mathcal{SM}_n^\circ$ et $\mathcal{SM}_n$.

2. **Matrices magiques.** On note $\mathcal{M}_n = \left\{ A \in \mathcal{SM}_n \,\middle|\, \operatorname{tr}(A) = \operatorname{atr}(A) = \lambda_1(A) \right\}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{M}_n$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que, si $n \geqslant 3$, l'application linéaire $\widetilde{\varphi} : \begin{cases} \mathcal{SM}_n^\circ \to \mathbb{R}^2 \\ A \mapsto \big(\operatorname{tr}(A), \operatorname{atr}(A)\big) \end{cases}$ est surjective.
   (c) En déduire (dans tous les cas) le rang de $\varphi : \begin{cases} \mathcal{SM}_n \to \mathbb{R}^2 \\ A \mapsto \big(\operatorname{tr}(A) - \lambda_1(A), \operatorname{atr}(A) - \lambda_1(A)\big), \end{cases}$ puis la dimension de $\mathcal{M}_n$.

Mélange

Exercice 43.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.

Montrer qu'un sous-espace vectoriel $F \subseteq E$ est stable par u si et seulement si $F \subseteq \ker u$ ou $\operatorname{im} u \subseteq F$.

Exercice 44.

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soit $a \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in \mathcal{L}(E, G)$.

Montrer que si $\operatorname{rg} a + \operatorname{rg} b < \dim E$, il existe $x \in E$ non nul tel que $a(x) = 0$ et $b(x) = 0$.

Exercice 45.

Soit $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer sans calcul qu'on peut trouver un triplet non nul de réels (λ, μ, ν) tel que la matrice $\lambda A + \mu B + \nu C$ soit triangulaire supérieure et de trace nulle.

Exercice 46.

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille libre de fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer $\operatorname{rg}(f_1', \dots, f_n') \geqslant n - 1$.

Exercice 47.

Montrer que $\varphi : \begin{cases} K[X] \times K \to K[X] \\ (P, \kappa) \mapsto XP + \kappa \end{cases}$ est un isomorphisme, et en déduire une nouvelle preuve du fait que K[X] n'est pas de dimension finie.

Exercice 48$^+$.

1. Soit $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}^{[0,1]}$ un espace vectoriel constitué de fonctions monotones. Montrer que $\dim \mathrm{E} \leqslant 2$.

2^{++}. Même question pour $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 49$^+$.

Montrer que $\left\{ u \in \mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})) \;\middle|\; \forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), u(\mathrm{A}^\mathsf{T}) = u(\mathrm{A})^\mathsf{T} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ et déterminer sa dimension.