

---

## Déterminants

---

**Exercice 5.**

Pour la première question, on pourra effectuer des opérations sur les lignes « par blocs » ou, ce qui revient au même, multiplier par une habile matrice triangulaire par blocs.

**Exercice 8.**

On peut obtenir une relation de récurrence à l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes.

**Exercice 11.**

Le déterminant à calculer ressemble à un mineur. Il s'agit donc de le « compléter » en un déterminant  $(n+1) \times (n+1)$  dans lequel on pourra *identifier* le mineur correspondant à la  $k$ -ième colonne (et une certaine ligne).

**Exercice 12.**

- ▶ Pour la deuxième question, il n'est pas nécessaire d'utiliser le processus d'orthonormalisation.
- ▶ Pour la quatrième question, on pourra montrer  $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \ker(M^T M) = \ker(M)$ .

**Exercice 13.**

Deux idées possibles :

- ▶ utiliser la positivité des déterminants de Gram vue dans un exercice précédent ;
- ▶ voir  $E$  comme un hyperplan de vecteur normal  $e_0$  dans un espace euclidien  $\widehat{E}$  (comment est-ce possible?) et considérer la famille orthogonale  $(e_0 + x_1, \dots, e_0 + x_n)$ .

**Exercice 24.**

Exo bidouillesque à mort. Il faut arriver à  $M^3 = I_n$  pour une certaine matrice bien choisie, et en déduire  $\det(M) = 1$ .

**Exercice 25.**

On pourra essayer d'utiliser le caractère multilinéaire alterné du déterminant.

**Exercice 26.**

Se ramener à l'unicité (à constante multiplicative près) des formes  $n$ -linéaires alternées.

**Exercice 31.**

On pourra utiliser des opérations élémentaires, en raisonnant « par blocs ».

## Autocorrection

### Autocorrection A.

---

(i) 0;

(ii)  $(1 - a^2)^2$ ;

(iii)  $(a - b)^2(a + b + 2c)(a + b - 2c)$ ;

(iv) 0;

(v)  $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_1 \cdots a_n$ ;

(vi)  $D_{2n} = D_{2n+1} = (-1)^n$ .