
Déterminants

Exercice 5.

Pour la première question, on pourra effectuer des opérations sur les lignes « par blocs » ou, ce qui revient au même, multiplier par une habile matrice triangulaire par blocs.

Exercice 8.

On peut obtenir une relation de récurrence à l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes.

Exercice 11.

Le déterminant à calculer ressemble à un mineur. Il s'agit donc de le « compléter » en un déterminant $(n+1) \times (n+1)$ dans lequel on pourra *identifier* le mineur correspondant à la k -ième colonne (et une certaine ligne).

Exercice 12.

- ▶ Pour la deuxième question, il n'est pas nécessaire d'utiliser le processus d'orthonormalisation.
- ▶ Pour la quatrième question, on pourra montrer $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \ker(M^T M) = \ker(M)$.

Exercice 13.

Deux idées possibles :

- ▶ utiliser la positivité des déterminants de Gram vue dans un exercice précédent ;
- ▶ voir E comme un hyperplan de vecteur normal e_0 dans un espace euclidien \widehat{E} (comment est-ce possible?) et considérer la famille orthogonale $(e_0 + x_1, \dots, e_0 + x_n)$.

Exercice 24.

Exo bidouillesque à mort. Il faut arriver à $M^3 = I_n$ pour une certaine matrice bien choisie, et en déduire $\det(M) = 1$.

Exercice 25.

On pourra essayer d'utiliser le caractère multilinéaire alterné du déterminant.

Exercice 26.

Se ramener à l'unicité (à constante multiplicative près) des formes n -linéaires alternées.

Exercice 31.

On pourra utiliser des opérations élémentaires, en raisonnant « par blocs ».

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) 0;

(ii) $(1 - a^2)^2$;

(iii) $(a - b)^2(a + b + 2c)(a + b - 2c)$;

(iv) 0;

(v) $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_1 \cdots a_n$;

(vi) $D_{2n} = D_{2n+1} = (-1)^n$.