Fonctions de deux variables

Topologie

Autocorrection A. ☑
Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

(i) $\mathbb{R}^2$;

(ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

(iii) $]0,1[^2$;

(iv) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > \cos(x)\right\}$.

Autocorrection B. ☑
Soit $p = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

Montrer que le *disque fermé* $\overline{D}(p,r) = \left\{z \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|z-p\| \leqslant r\right\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.

1. Soit I un ensemble quelconque et $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^2$.

   Montrer que leur union $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $U \cap V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $U_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| < \frac{1}{n}\right\}$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble U_n est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, mais que leur intersection n'en est pas un.

Exercice 2$^+$. ☑
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'une fonction continue $U \to \mathbb{R}$ ne peut pas être injective.

Dérivées partielles

Calcul

Autocorrection C. ☑
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

(i) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{x}{y} \end{cases}$;

(ii) $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{1}{xy^2} \end{cases}$;

(iii) $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x\ \ln(xy) \end{cases}$;

(iv) $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^{-x} \sin\left(x^2+y^2\right) \end{cases}$.

Autocorrection D.

Montrer que la norme $N : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$, mais que sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est de classe C^1. Donner ses dérivées partielles.

Autocorrection E.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Montrer que la fonction $\theta : t \mapsto f(t^2, t^3)$ est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles.

Autocorrection F.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Montrer que les fonctions suivantes appartiennent à $C^1(\mathbb{R})$ ou $C^1(\mathbb{R}^2)$ suivant les cas, et calculer leur dérivée ou leurs dérivées partielles en fonction des dérivées partielles de f.

1. $u_1 : (x,y) \mapsto f(y,x)$;
2. $u_2 : x \mapsto f(x,x)$;
3. $u_3 : (x,y) \mapsto f(y, f(x,x))$;
4. $u_4 : x \mapsto f(x, f(x,x))$.

Exercice 3.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *radiale*, c'est-à-dire telle que la valeur de $f(x,y)$ ne dépende que de $\sqrt{x^2+y^2}$.

Montrer $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Exercice 4.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Montrer que la fonction $\varphi : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_x^y f$ est de classe C^1, et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 5.

On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f admet en tout point des dérivées selon tout vecteur, c'est-à-dire que, pour tout point $p \in \mathbb{R}^2$ et tout $v \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\varphi_v : t \mapsto f(tv)$ est dérivable en 0.
2. Montrer que la fonction f n'est pas continue en 0.

Exercice 6 (Équations de Cauchy-Riemann).

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On définit les deux fonctions :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \text{Ré}\,\big(P(x+iy)\big) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \text{Im}\,\big(P(x+iy)\big). \end{cases}$$

Montrer qu'elles vérifient *les équations de Cauchy-Riemann*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial g}{\partial x}(a,b).$$

Applications

Exercice 7.

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\nabla f = 0$. Montrer que f est constante.
2. Donner un exemple d'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de fonction $f \in C^1(U)$ non constante telle que $\nabla f = 0$.

Exercice 8.
Soit $r < R \in \mathbb{R}_+^*$. On note $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, r^2 < x^2 + y^2 < R^2 \right\}$.

Soit $f \in C^1(A; \mathbb{R})$ tel que $\nabla f = 0$. Montrer que f est constante.

Exercice 9.
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ dont toutes les dérivées premières sont majorées, en valeur absolue, par $K \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \left|f(x_1) - f(x_2)\right| \leqslant K\sqrt{n}\,\|x_1 - x_2\|$.
2. L'inégalité est-elle optimale ?

Exercice 10.
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ telle que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \left|f(x_1) - f(x_2)\right| \leqslant \|x_1 - x_2\|^2$. Montrer que f est constante.

Exercice 11.
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement si $\exists h \in C^1(\mathbb{R}) : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = h(x)$.

Exercice 12 (Coordonnées polaires).
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. On définit :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big). \end{cases}$$

1. Calculer les dérivées partielles de g, que l'on notera $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$, en fonction de celles de f.
2. On dit que f est *radiale* si elle est constante sur tout cercle centré en 0. Montrer que cela se produit si et seulement si $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) - b\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$.

Exercice 13 (Opérateur d'Euler).
Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $k \in \mathbb{N}$. Une fonction $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ est dite *homogène de poids* k si

$$\forall x \in U, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(t\,x) = t^k f(x).$$

Montrer que cela se produit si et seulement si $\forall (a, b) \in U$, $a\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) + b\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = k\,f(a, b)$.

Exercice 14.

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Montrer que f vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement s'il existe $h \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = h(2x + y)$.
2. Trouver toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ telles que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) - 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = a$.

Exercice 15.
Déterminer les $f \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^*, x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Extrema

Autocorrection G.

Déterminer les extrema (locaux et globaux) des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \cos(x) + y^2$;
2. $f_2 : (x, y) \mapsto e^{3x}\, y^2 + e^x\, y$;
3. $f_3 : (x, y) \mapsto 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y$;
4. $f_4 : (x, y) \mapsto \exp(x \arctan(y))$.

Exercice 16.

On considère la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x\, e^y + y\, e^x. \end{array}\right.$

1. Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et déterminer ses points critiques.
2. Montrer que f n'a pas d'extremum local.

Exercice 17 (Fonction convexe).

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\forall p, q \in \mathbb{R}^2, \langle \nabla f(p) - \nabla f(q) | p - q \rangle \geqslant 0$.

Montrer que tout point critique de f en est un minimum.

Exercice 18$^+$.

Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (y - x^2)(y - 2x^2). \end{array}\right.$

1. Montrer que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f, et que f n'admet pas en ce point de maximum local.
2. Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, la fonction $t \mapsto f(tv)$ admet un minimum local en 0.
3. En examinant le comportement de f le long d'une parabole bien choisie, montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Mélange

Exercice 19^{++}.

Montrer qu'il existe un C^1-difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \to]-1, 1[^2$, c'est-à-dire une bijection de classe C^1 dont la réciproque est encore de classe C^1.