
Septième composition de mathématiques

Durée : 4 heures.

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- ▶ *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- ▶ *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats.*
- ▶ *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- ▶ *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on considère les ensembles

$$F = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+10} = u_n \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}.$$

1. F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
2. F et G sont-ils en somme directe?
3. F et G sont-ils supplémentaires?

Exercice 2

1. Soit u et v deux endomorphismes d'un même espace vectoriel E tels que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$.

Montrer que u et v sont deux projecteurs de même noyau.

2. Réciproquement, soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs de même noyau.

Montrer que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$.

Problème. Autour des applications de « multiévaluation ».

Le corps des scalaires K sera \mathbb{R} ou \mathbb{C} . (Dans certaines questions, on se placera spécifiquement dans l'un des deux cas.) Toutes les notions d'algèbre linéaire ((sous-)espaces vectoriels, applications linéaires, etc.) seront relatives au corps K .

Dans ce problème, on considérera un ensemble Ω et un sous-espace vectoriel E de l'espace K^{Ω} de toutes les fonctions $\Omega \rightarrow K$. Étant donné $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ (pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$), on pourra ainsi étudier l'application de « multiévaluation ».

$$\Phi : \begin{cases} E \rightarrow & K^n \\ f \mapsto & (f(z_1), \dots, f(z_n)). \end{cases}$$

L'entier n est toujours supposé appartenir à \mathbb{N}^* .

1. Montrer que Φ est une application linéaire.
2. Montrer que si Φ est surjective, alors les éléments $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ sont distincts.

Partie I. Quelques cas de surjectivité totale.

3. On considère dans cette question $z_1, \dots, z_n \in K$ et l'application $\Phi : \begin{cases} K[X] \rightarrow & K^n \\ P \mapsto & (P(z_1), \dots, P(z_n)). \end{cases}$

On note par ailleurs $\Pi = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$.

- (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}_{\Pi} = \{Q\Pi \mid Q \in K[X]\}$ des polynômes multiples de Π est un sous-espace vectoriel de $K[X]$.
- (b) Montrer que $K[X] = K_{n-1}[X] \oplus \mathcal{M}_{\Pi}$.
- (c) Montrer que $\ker \Phi = \mathcal{M}_{\Pi}$ si et seulement si z_1, \dots, z_n sont distincts.
- (d) On suppose z_1, \dots, z_n distincts. Montrer que Φ est surjective.

Dans toute la fin de cette partie, on se placera sur le corps $K = \mathbb{R}$. On notera $D : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ l'opérateur de dérivation (dont on ne demande pas de démontrer la linéarité).

4. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on notera $e_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\lambda x}. \end{cases}$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ distincts et $E = \text{Vect}(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$.

(a) Montrer que $\dim E = n$.

(b) Montrer que E est stable sous l'opérateur $D : \forall f \in E, D(f) \in E$.

L'opérateur de dérivation induit donc un endomorphisme de E que l'on note $D_E \in \mathcal{L}(E)$.

(c) Calculer le rang de D_E et en déduire que D_E est un automorphisme de E si et seulement si l'on a $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k \neq 0$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion :

« Quels que soient les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, toute fonction $f \in \text{Vect}(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ est nulle ou s'annule au plus $n - 1$ fois. »

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ par récurrence.

Indication. Dans la phase d'hérédité, une fois invoqués les $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$, on pourra commencer par traiter le cas où l'un des λ_i est nul.

6. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distincts et $E = \text{Vect}(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$. Soit $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ distincts.

Montrer que l'application de multiévaluation $\Phi : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}^n \\ f \mapsto (f(z_1), \dots, f(z_n)) \end{cases}$ est un isomorphisme.

7. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $p_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\lambda. \end{cases}$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ distincts et $E = \text{Vect}(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})$. Soit $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}_+^*$ distincts.

Montrer que l'application de multiévaluation $\Phi : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}^n \\ f \mapsto (f(z_1), \dots, f(z_n)) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Partie II. Intermède : le *spark* d'une famille liée.

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille liée. On définit le *spark* * de \mathcal{F} , que l'on notera $\text{spark}(\mathcal{F})$, comme le plus petit entier s tel que \mathcal{F} possède une sous-famille liée à s éléments.

8. Quelles sont les familles liées dont le *spark* vaut 1 ?

9. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de K^3 .

Quel est le *spark* de la famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$?

10. Soit \mathcal{F} une famille liée. Montrer que $\text{spark}(\mathcal{F}) \leq \text{rg}(\mathcal{F}) + 1$.

11. Dans cette dernière question, on se place sur le corps $K = \mathbb{R}$ et on fixe $\Omega = \{z_1, \dots, z_n\} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ de cardinal n . On note alors $E = \mathbb{R}^\Omega$ l'espace vectoriel des fonctions $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

► Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $e_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction envoyant z_i sur 1 et les autres éléments de Ω sur 0. On pourra librement utiliser que (e_1, \dots, e_n) est une base de E .

► Pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, on note $p_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $z \mapsto z^k$.

Montrer que le *spark* de $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n, p_0, \dots, p_{n-1})$ est $n + 1$.

Indication. On pourra utiliser la dernière question de la première partie.

*. Le nom a été introduit en 2003 : il s'agit de la contraction de *sparse rank*, quelque chose comme *indice de parcimonie*. Je garde le nom anglais, faute de traduction canonique.

Partie III. Existence de multiévaluations surjectives, et deux applications.

On revient au cadre des sous-espaces vectoriels de K^Ω , pour un ensemble Ω quelconque.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\text{Surj}(n)$ l'assertion

Quel que soit le sous-espace vectoriel E de K^Ω de dimension au moins n , il existe $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ tels que $\Phi : \begin{cases} E \rightarrow & K^n \\ f \mapsto & (f(z_1), \dots, f(z_n)) \end{cases}$ soit surjective.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{Surj}(n)$.

13. **Première application : fonctions de module constant.** Dans cette application, le corps des scalaires est $K = \mathbb{C}$. Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^Ω tel que, pour tout $f \in E$, la fonction réelle $|f| : t \mapsto |f(t)|$ soit constante.

(a) Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie F de E , on a $\dim F \leq 1$.

(b) En déduire que E est de dimension finie et que $\dim E \leq 1$.

14. **Deuxième application : Sous-espaces invariants par translation.** Jusqu'à la fin du problème, le corps des scalaires est $K = \mathbb{R}$.

Un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ est dit *invariant par translation* si, pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x + a)$ appartient encore à E .

Donner un exemple de sous-espace vectoriel (non trivial) de dimension finie de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ invariant par translation.

15. On fixe dans les deux prochaines questions un sous-espace vectoriel E de l'espace $D^1(\mathbb{R})$ des fonctions dérivables et on suppose E de dimension finie et non trivial. On va montrer qu'il est alors automatiquement stable par dérivation.

On suppose E invariant par translation et on note $n = \dim E$.

D'après $\text{Surj}(n)$, on peut trouver n scalaires $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ tels que $\Phi : \begin{cases} E \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ f \mapsto & (f(z_1), \dots, f(z_n)) \end{cases}$ soit surjective.

Montrer qu'il existe n fonctions $g_1, \dots, g_n \in E$ telles que $\forall f \in E, f = \sum_{k=1}^n f(z_k) g_k$.

16. Soit $f \in E$.

(a) Soit $x, t \in \mathbb{R}$. Montrer $f(x + t) = \sum_{k=1}^n f(z_k + t) g_k(x)$.

(b) En déduire $f' \in E$.

17. **Généralisation.** Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie de $C^0(\mathbb{R})$ invariant par translation. Montrer que $E \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ et que E est stable par dérivation.

On pourra admettre que toute fonction continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possède des primitives.