Limites et continuité

Exercice 5.

Pour la croissance, on pourra considérer deux points $x_0 < x_1$ dans $]a, b[$ et montrer l'encadrement $f(x_0^+) \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_1^+)$.

Exercice 8.

L'exercice n'est pas facile parce que rien ne dit *a priori* que les fonctions f et g possèdent la même période. Mais une démonstration astucieuse montre que si g est, par exemple, T-périodique, alors il en ira de même de f.

Exercice 9.

Quelles sont les valeurs prises par la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor^{-1}$?

Exercice 11.

Pour la deuxième question, on pourra chercher un exemple de la forme $\mathbb{1}_A$ pour un choix judicieux de partie $A \subseteq \mathbb{R}$.

Exercice 13.

On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Cesàro.

Exercice 15.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Le théorème de la limite monotone montre déjà l'inégalité $f(x_0^-) \leqslant f(x_0^+)$. Il s'agit donc d'utiliser l'autre hypothèse pour démontrer l'inégalité réciproque.

Exercice 20.

Pour la première question, il est facile de montrer que, quel que soit $x \in I$, $f(x) = \pm g(x)$. La difficulté est de montrer que le signe remplaçant le $\pm$ ne dépend pas de x.

Exercice 42.

On pourra d'abord montrer le résultat en restriction à $\mathbb{N}$, puis à $\mathbb{Z}$, puis à $\mathbb{Q}$.

Exercice 43.

On pourra commencer par montrer la définition de la convexité avec $\lambda \in [0, 1]$ dyadique (c'est-à-dire un rationnel dont le dénominateur est une puissance de 2).

Exercice 45.

On pourra commencer par montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

Exercice 48.

Le théorème des valeurs intermédiaires montre que dans tous les cas, $f[I]$ est un intervalle. Pour savoir quels types d'intervalles sont possibles, il est bon de tracer approximativement des graphes possibles avant de chercher à donner des formules.

Exercice 55.

On pourra (notamment) définir proprement la propriété « f n'est pas majorée au voisinage de $+\infty$ » et montrer – en utilisant la continuité – que si f n'est pas majorée au voisinage de $+\infty$, alors il en va de même de $f \circ f$.

Exercice 56.

Une première étape est de montrer que f est une application bijective. Cela permet ensuite d'étudier des « suites récurrentes » indexées par $\mathbb{Z}$ d'itératrice f.

Même avec ces indications, l'exercice garde du mordant...

Exercice 60.

Il est possible d'obtenir un tel développement asymptotique à l'aide du $\mathrm{DL}_n(0)$ de arctan.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) 0;

(ii) la fonction n'a pas de limite (on peut trouver deux suites $(\xi_n^{\pm})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\xi_n^{\pm} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\cos\left((\xi_n^{\pm})^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm 1$);

(iii) 1;

(iv) $+\infty$;

(v) 0;

(vi) 1;

(vii) 1;

(viii) e;

(ix) 1;

(x) $\dfrac{1}{2}$;

(xi) 1;

(xii) $+\infty$;

(xiii) la fonction n'a pas de limite, mais elle converge vers $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ à droite et $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ à gauche (on peut factoriser : $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ et $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$);

(xiv) e;

(xv) $1+\sqrt{2}$;

(xvi) $-\dfrac{1}{2}$;

(xvii) $\dfrac{1}{2}$;

(xviii) 1;

(xix) On obtient facilement $\ln(1+h) \underset{h\to0}{\sim} h$ et $\ln(\ln(1+h)) \underset{h\to0}{\sim} \ln h$ donc la fonction est $\underset{h\to0}{\sim} h\ln(h)$, et elle tend vers 0 par croissances comparées;

(xx) On sait que la fonction arccos n'est pas dérivable en 1, avec une tangente verticale. Cela donne $\dfrac{\arccos x - \arccos(1)}{x-1} \xrightarrow[x\to1]{} -\infty$.

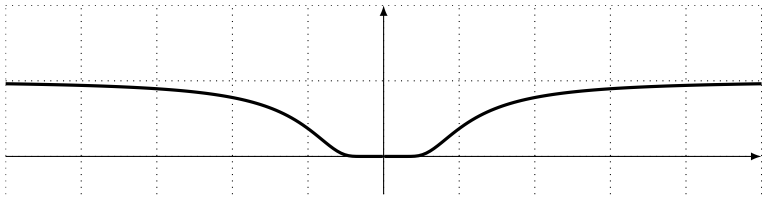
Ainsi, $\dfrac{1-x}{\arccos x} \xrightarrow[x\to1]{} 0$.

Autocorrection B.

(i) La formule définit une application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, continue par opérations.

On a $-\dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to0]{} -\infty$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$: la fonction admet le prolongement continu

$$\widetilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$



(ii) La formule définit une application $f : \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, continue par opérations.

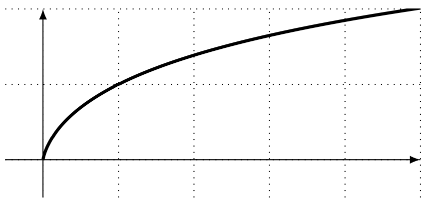
On a $x \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par croissances comparées, donc $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Par ailleurs, on a la limite du taux d'accroissement $\dfrac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \xrightarrow[x \to 1]{} \ln'(1) = 1$, ce qui implique

$$f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 1.$$

Ainsi, la fonction admet le prolongement continu

$$\widetilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \{0, 1\} \\ 0 & \text{si } x = 0\,; \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases} \end{cases}$$



(iii) La formule définit une application

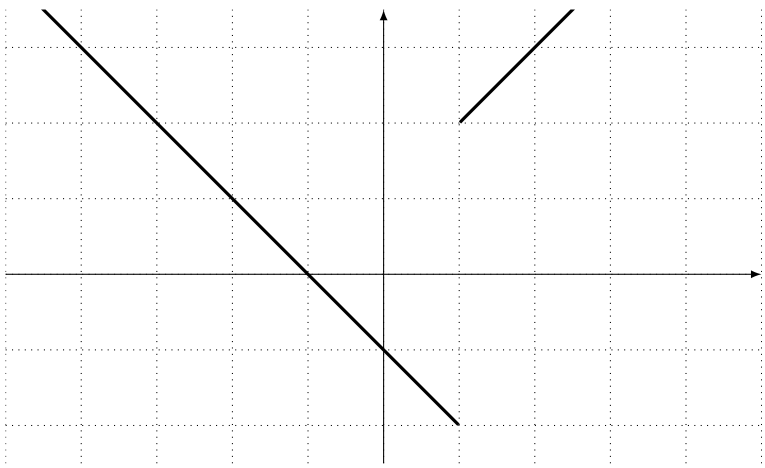
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \dfrac{x - 1}{|x - 1|}(x + 1) = (x + 1) \times \text{signe}(x - 1), \end{cases}$$

continue par opérations.

On a

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 1 \\ x < 1}]{} -2 \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 1 \\ x > 1}]{} 2,$$

donc f n'a pas de limite en 2, et f n'a donc pas de prolongement continu en 1.



(iv) La formule définit une application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to & \mathbb{R} \\ x \quad \mapsto & \dfrac{(x^2-1)^2}{|x-1|} = |x-1| \times (x+1)^2, \end{cases}$$

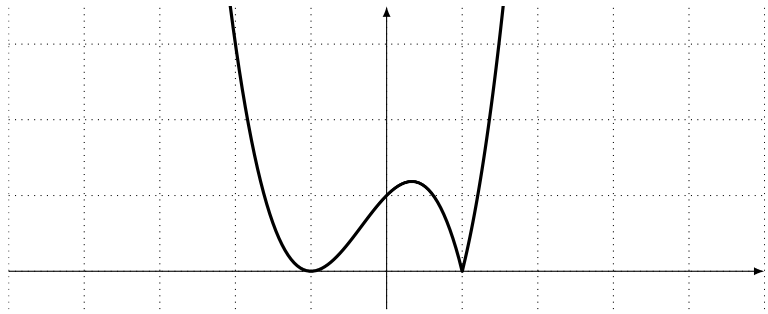
continue par opérations.

On a

$$f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 0,$$

donc f admet le prolongement continu

$$\widetilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$



(v) La formule définit une application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \sin x \times \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), \end{cases}$$

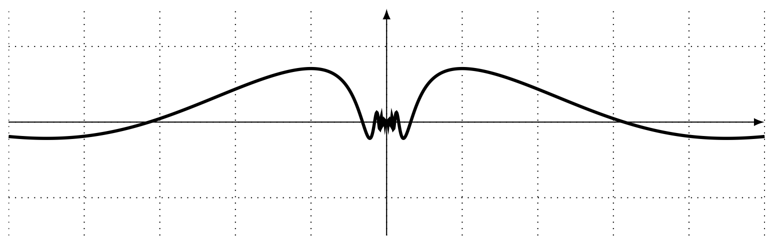
continue par opérations.

On a

$$\forall x, |f(x)| \leqslant \underbrace{|\sin x|}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0},$$

donc le théorème des gendarmes entraîne que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, ce qui entraîne que f admet le prolongement continu

$$\widetilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$



(vi) La formule définit une application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \cos x \times \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), \end{cases}$$

continue par opérations.

Considérons deux suites $(\xi_n^{\pm})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \xi_n^- = \frac{1}{(2n+1)\pi} \qquad \text{et} \qquad \xi_n^+ = \frac{1}{(2n)\pi}.$$

Ces suites sont à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, et convergent vers 0. Par continuité, cela entraîne que

$$\cos(\xi_n^-) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \cos(\xi_n^+) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

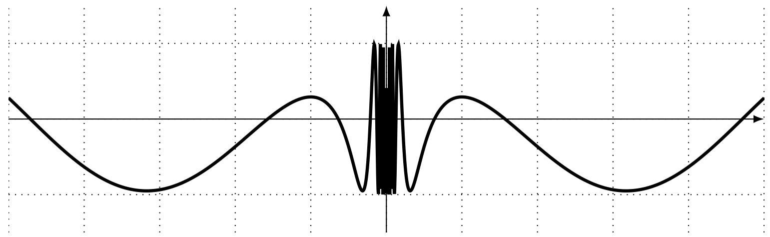
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\frac{1}{\xi_n^-}\right) = -1$, donc

$$f(\xi_n^-) = \cos(\xi_n^-) \times \cos\left(\frac{1}{\xi_n^-}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.$$

De même, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\frac{1}{\xi_n^+}\right) = 1$, donc

$$f(\xi_n^+) = \cos(\xi_n^+) \times \cos\left(\frac{1}{\xi_n^+}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Cela démontre que f n'a pas de limite en 0. En particulier, f n'est pas prolongeable par continuité en 0.



Autocorrection C.

Soit

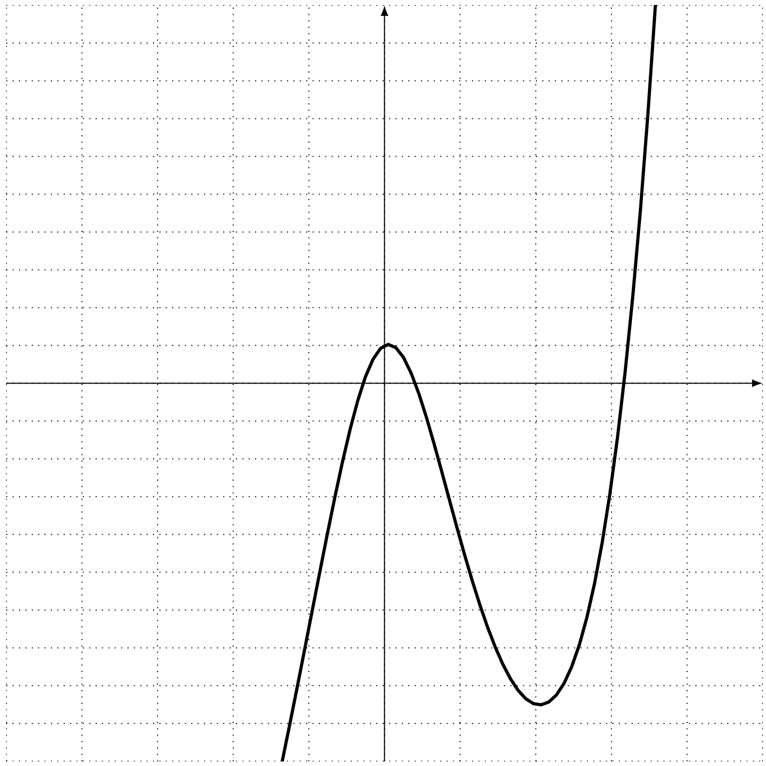
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & e^x - \pi^2 \ln(x^2+1). \end{cases}$$

C'est une fonction continue, par opérations.

On a $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = e - \pi^2 \ln(2) < 0$, et les limites

$$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \text{ (par croissance comparée).}$$

- D'après le théorème des valeurs intermédiaires (généralisé), la fonction f s'annule en un point $x_0 \in\,]-\infty, 0]$, nécessairement $x_0 < 0$ (car $f(0) \neq 0$).
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule en un point $x_1 \in [0,1]$, nécessairement $0 < x_1 < 1$.
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires (généralisé), la fonction f s'annule en un point $x_1 \in\,]1, +\infty]$, nécessairement $x_2 > 1$ (car $f(1) \neq 0$).



Autocorrection D.

(i) $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$;

(ii) $\dfrac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{2}{x}$ et $\dfrac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2}$;

(iii) $\ln(1+x^2)-\sin(x^2)+2\cos^2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln x$;

(iv) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}} \underset{x\to1}{\sim} \sqrt{x-1}$;

(v) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$;

(vi) $1+e^{e^{e^x}}-\arctan x \underset{x\to-\infty}{\sim} 1+e+\dfrac{\pi}{2}$;

(vii) $\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{-1/4}}{\sqrt{2}}$;

(viii) $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to\pi}{\sim} \dfrac{\pi-x}{\sqrt{\pi}}$;

(ix) $\dfrac{\sqrt{x}^3+2}{\sqrt[3]{x}^2+3} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{5/6}$;

(x) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$;

(xi) $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x}$;

(xii) Pour tout $x > e$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{\ln(x-1)} &= \sqrt{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}-\sqrt{\ln\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}\\ &= \sqrt{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\ln x}\left(\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} - \sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}\right).$$

Cette expression peut paraître horrible, mais on a en fait appliqué à fond l'idée de factoriser par les termes prépondérants, et on se retrouve maintenant dans une position idéale pour utiliser des DL de $u \mapsto \ln(1+u)$ ou $u \mapsto \sqrt{1+u}$.

Or, quand $x \to +\infty$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{car } \begin{cases} \ln(1+u) = 1+u+\underset{u\to 0}{o}(u) \\ \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \qquad \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \frac{1}{x\,\ln x} + o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} &= \sqrt{1+\frac{1}{x\,\ln x}+o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right)} \\ &= 1+\frac{1}{2}\frac{1}{x\,\ln x}+o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right) \quad \text{car } \begin{cases} \sqrt{1+u} = 1+\frac{1}{2}u+\underset{u\to 0}{o}(u) \\ \dfrac{1}{x\,\ln x}+o\left(\dfrac{1}{x\,\ln x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \dfrac{1}{x\,\ln x}+o\left(\dfrac{1}{x\,\ln x}\right) = O\left(\dfrac{1}{x\,\ln x}\right). \end{cases}\end{aligned}$$

Exactement de la même façon,

$$\sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = 1-\frac{1}{2}\frac{1}{x\,\ln x}+o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} - \sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} &= \frac{1}{x\,\ln x}+o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x\,\ln x}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après les propriétés multiplicatives de l'équivalence,

$$\begin{aligned}\sqrt{\ln(1+x)}-\sqrt{\ln(1-x)} &= \sqrt{\ln x}\left(\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} - \sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln x}\times\frac{1}{x\,\ln x} \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}.\end{aligned}$$

(xiii) $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x$;

(xiv) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} x^2$;

(xv) $\tan x-\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^3$;

(xvi) $\ln(1+\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(xvii) $\ln(\ln(1+x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$;

(xviii) $\ln\big(\cos(1-h)\big) \underset{h\to 0}{\sim} \ln(h)$, ce que l'on peut réécrire de façon plus académique (mais plus perturbante) $\ln\big(\cos(1+h)\big) \underset{h\to 0}{\sim} \ln(-h)$ ou encore $\ln\big(\cos x\big) \underset{x\to\pi/2}{\sim} \ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.