

---

## Dérivation

---

**Exercice 5.**

Essayer de représenter graphiquement  $g$  pour comprendre l'enjeu.

**Exercice 10.**

Attention à ne pas sommer sans réfléchir  $n$  développements limités (pourquoi cela n'a-t-il pas de sens?) Il vaut mieux ici revenir à une démonstration avec des  $\varepsilon$ .

**Exercice 12.**

On peut procéder par analyse et synthèse. Dans la phase d'analyse, on peut fixer une des variables, par exemple  $y$ . On obtient ainsi une égalité entre deux fonctions d'une variable, que l'on peut dériver.

**Exercice 14.**

On ne peut pas dériver une fonction dont le domaine est  $\mathbb{N}^*$ . Il faut donc se ramener à une fonction définie sur un intervalle pour utiliser les outils du cours.

**Exercice 18.**

On pourra faire un dessin, puis chercher une fonction dont les points critiques sont pertinents dans le problème.

**Exercice 33.**

Penser au théorème de la limite de la dérivée.

**Exercice 36.**

Factoriser  $x^2 + 1$  et en déduire une expression de  $f$  de la forme  $\frac{\alpha}{P(x)} + \frac{\beta}{Q(x)}$ , où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes complexes de degré 1.

**Exercice 47.**

Ce n'est pas la seule façon de faire, mais une démonstration très rapide peut être obtenue en appliquant le théorème de Rolle à une fonction très judicieuse.

**Exercice 50.**

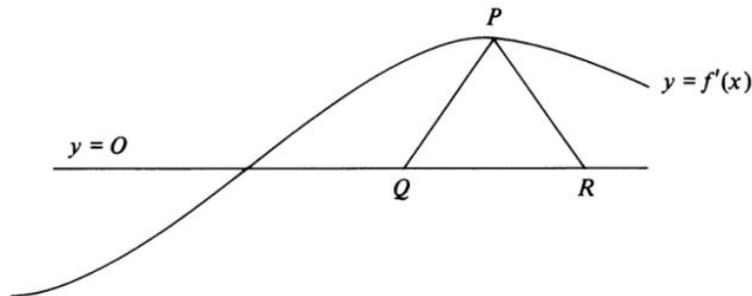
On pourra montrer que l'image de  $f$  est un certain segment  $[\alpha, \beta]$ , et que  $f' = 1$  sur  $] \alpha, \beta [$ .

**Exercice 51.**

---

Voilà un commentaire d'un grand analyste anglais, John E. Littlewood (1885-1977) :

*If  $f' \neq o(1)$ , the graph  $y = f'(x)$  will for some arbitrarily large  $x$  have 'peaks' (above or below  $y = 0$ ) enclosing triangles like PQR, the height of P not small, the slopes of PQ, PR not large, and so the area PQR not small. Then  $f(Q) - f(R)$  is not small, contradicting  $f = O(1)$ . This is rigorous (and printable), in the sense that in translating into symbols no step occurs that is not both unequivocal and trivial. For myself I think like this wherever the subject matter permits.*

**Exercice 53.**

---

Pour la première question, on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis et constater que le nombre  $P\left(\frac{a}{b}\right)$  est un rationnel sur lequel on possède des informations.

**Exercice 54.**

---

On pourra entre autres calculer  $Q - Q'$ .

## Autocorrection

**Autocorrection A.**

---

(i) **Faux.** Si l'on prend  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a = 0$ , on a, pour tout  $h \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{h^2}{h} \\ &= h \\ \text{mais } f'(a) &= 2 \times 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc on a  $\forall h \in \mathbb{R}^*, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \neq f'(a)$ , ce qui montre que l'assertion proposée est fautive.

(ii) **Faux.** Prenons  $f : x \mapsto |x|$  et  $a = 0$ . On sait que  $f$  n'est pas dérivable en 0 (elle est à la fois dérivable à gauche et à droite mais  $f'_g(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$ ), alors que, quel que soit  $x \neq a$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| &= \left| \frac{|x|}{x} \right| \\ &= 1, \end{aligned}$$

donc il n'est pas vrai que la valeur absolue  $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right|$  tende vers  $+\infty$  en 0.

(iii) **Faux.** Prenons  $a = -1, b = 1, c = 0$  et  $f : x \mapsto |x|$ . On sait que  $f$  n'est pas dérivable en 0 (donc pas dérivable sur  $[-1, 1]$ ). En revanche, les deux restrictions  $f|_{[-1,0]}$  et  $f|_{[0,1]}$  sont affines (la première est  $x \mapsto -x$ , la seconde  $x \mapsto x$ ), donc dérivables.

(iv) **Faux.** La fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

est dérivable et de dérivée nulle (car elle coïncide, au voisinage de tout  $a < 0$  avec la fonction constante  $-1$  et au voisinage de tout  $a > 0$  avec la fonction constante  $1$ ). Pourtant, cette application n'est pas constante.

(v) **Vrai.** La fonction  $x \mapsto \ln(x + 1)$  est un exemple.

(vi) **Faux.** L'idée est de prendre une fonction qui oscille violemment, où la rapidité des oscillations va faire « exploser » la dérivée.

Par exemple, considérons la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \frac{1}{x} \sin(x^3). \end{cases}$$

On a  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  grâce au théorème des gendarmes et à l'encadrement  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |f(x)| \leq \frac{1}{x}$ .

En revanche,  $f$ , qui est dérivable par opérations, vérifie, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

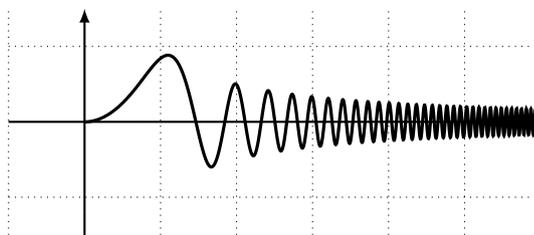
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \sin(x^3) + \frac{1}{x} 3x^2 \cos(x^3) \\ &= 3x \cos(x^3) - \frac{1}{x^2} \sin(x^3). \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sqrt[3]{2n\pi})_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et

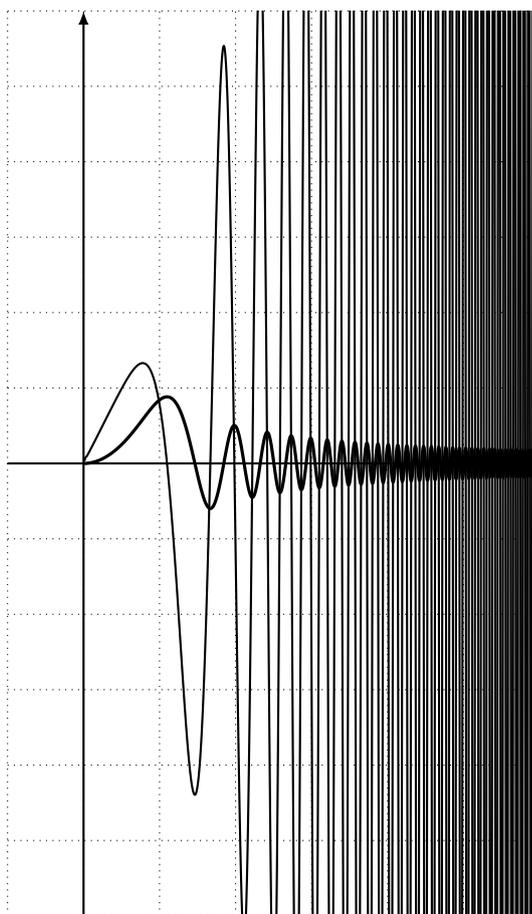
$$\begin{aligned} f'(u_n) &= 3\sqrt[3]{2n\pi} \cos(2n\pi) - \frac{1}{(2n\pi)^{2/3}} \sin(2n\pi) \\ &= 3\sqrt[3]{2n\pi} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

ce qui démontre que  $f'$  ne tend pas vers 0 en  $+\infty$ .

On peut objecter que  $f$  n'est pas définie sur  $\mathbb{R}_+$ , mais il suffit alors de considérer  $x \mapsto f(x + 1)$  pour régler ce problème.



f



f et f'

### Autocorrection B.

---

- Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable paire.

La bonne idée est de « dériver l'égalité »  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ .

Plus précisément, les fonctions

$$f \quad \text{et} \quad f \circ (-\text{id}_{\mathbb{R}}) : x \mapsto f(-x)$$

sont égales et toutes les deux dérivables (la première par hypothèse, la deuxième par composition).

Leurs dérivées sont donc égales. Comme la première est  $f'$  et la seconde est  $x \mapsto -f'(-x)$  (par dérivation des fonctions composées), on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f'(-x),$$

ce que l'on peut encore réécrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = -f'(x).$$

La fonction  $f'$  est donc impaire.

On procède exactement de la même façon pour les deux autres questions.

- Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable impaire.

Les fonctions

$$-f \quad \text{et} \quad f \circ (-\text{id}_{\mathbb{R}}) : x \mapsto f(-x)$$

sont égales et toutes les deux dérivables (la première par combinaison linéaire, la deuxième par composition).

Leurs dérivées sont donc égales. Comme la première est  $-f'$  et la seconde est  $x \mapsto -f'(-x)$  (par dérivation des fonctions composées), on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(x) = -f'(-x),$$

ce que l'on peut encore réécrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = f'(x).$$

La fonction  $f'$  est donc paire.

- Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable périodique. On peut donc trouver  $T > 0$  tel que  $f$  soit  $T$ -périodique.

Les fonctions

$$f \quad \text{et} \quad x \mapsto f(x + T)$$

sont égales et toutes les deux dérivables (la première par hypothèse, la deuxième par composition).

Leurs dérivées sont donc égales. Comme la première est  $f'$  et la seconde est  $x \mapsto f'(x + T)$  (par dérivation des fonctions composées), on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(x + T).$$

La fonction  $f'$  est donc  $T$ -périodique.

### Autocorrection C.

---

On peut montrer  $f'(0) \geq 0$ .

En effet, on peut trouver  $\eta \in ]0, 1]$  tel que  $\forall x \in [0, \eta], f(x) \geq f(0)$ . Quel que soit  $h \in [0, \eta]$ , on a

$$f(h) \geq f(0) \quad \text{donc} \quad \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq 0.$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges, on a donc

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq 0.$$

En revanche, on ne peut conclure  $f'(0) = 0$ , comme le montre l'exemple de  $x \mapsto x$ .

### Autocorrection D.

---

Considérons la fonction

$$f : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2. \end{cases}$$

Cette fonction est lisse par opérations. En particulier, elle est continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$ .

D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver  $x \in ]0, 1[$  tel que

$$f'(x) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$