

---

## Dérivation

---

### Généralités

**Autocorrection A.**


Dire, en justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

- (i) Si  $f$  est une application dérivable en  $a$  alors  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$  pour  $h$  suffisamment petit.
- (ii) Une application  $f$  n'est pas dérivable en  $a$  si et seulement si  $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \xrightarrow[x \rightarrow a]{} +\infty$ .
- (iii) Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c \in ]a, b[$ . L'application  $f$  est dérivable si et seulement  $f|_{[a,c]}$  et  $f|_{[c,b]}$  le sont.
- (iv) Une application dérivable de  $\mathbb{R}^*$  dans  $\mathbb{R}$  dont la dérivée est nulle est constante.
- (v) Il existe  $f \in D^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$  tendant vers  $+\infty$  en  $+\infty$  et dont la dérivée tend vers 0.
- (vi) Si  $f \in D^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$  tend vers 0 en  $+\infty$ , alors  $f'$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

**Autocorrection B.**


Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire ? impaire ? périodique ?

**Exercice 1.**

Étudier la dérivable des fonctions suivantes (on précisera les domaines de définition).

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| 1. $x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$ ;       | 3. $x \mapsto x x $ ;              |
| 2. $x \mapsto (x^2 - 1) \arccos(x^2)$ ; | 4. $x \mapsto \frac{x}{ x  + 1}$ . |

**Exercice 2.**

En quels points la fonction  $x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) x^2$  est-elle dérivable ?

**Exercice 3.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On suppose  $f$  paire et  $f'$  périodique. Montrer que  $f$  est périodique.

**Exercice 4.**

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on considère  $f_\lambda : x \mapsto \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$  et sa tangente  $T_\lambda(a)$  au point d'abscisse  $a \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que les droites  $T_\lambda(0)$  (pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) sont parallèles.
2. Montrer que les droites  $T_\lambda(1)$  (pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) sont concourantes.

**Exercice 5.**


Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. À quelle condition la fonction

$$g : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ f(2x - 1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est-elle dérivable sur  $[0, 1]$  ?

**Exercice 6<sup>+</sup>.**

Soit  $f, g \in D^1(\mathbb{R})$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\max(f, g)$  soit dérivable en  $x_0$ .

**Exercice 7.**

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On note  $\sigma_{[f,a]} : x \mapsto \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ .

- Montrer que si  $f$  est dérivable en  $a$ , la fonction  $\sigma_{[f,a]}$  admet une limite finie en  $a$  (et la préciser).
- La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

**Exercice 8.**

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application dérivable en  $a$ .

Montrer que  $x \mapsto \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$  admet une limite en  $a$ , et la préciser.

**Exercice 9<sup>+</sup>.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue en  $0$ , et  $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ h \mapsto \frac{f(2h) - f(h)}{h} \end{cases}$ .

Montrer que  $g$  possède une limite en  $0$  si et seulement si  $f$  est dérivable à droite en  $0$  (et, dans ce cas, donner une relation entre  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  et  $f'_d(0)$ ).

**Exercice 10<sup>+</sup>.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable à droite en  $0$ , et telle que  $f(0) = 0$ .

Déterminer la limite de la suite  $\left( \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 11<sup>+</sup>.**

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$ .

- Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge. On note  $S$  sa limite.
- Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et nulle en  $0$ .

Calculer la limite de  $\left( \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  en fonction de  $S$  et  $f'(0)$ .

- En utilisant la fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$ , calculer  $S$ .

**Exercice 12<sup>+</sup> (Équation fonctionnelle de Cauchy : le cas dérivable).**

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

**Exercice 13<sup>+</sup>.**

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(2x) = 2f(x)$ .

## Extrema

### Autocorrection C.



Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, admettant un minimum local en 0. Que peut-on dire de  $f'(0)$ ?

### Exercice 14.



Déterminer  $\max \{n^{1/n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ .

### Exercice 15.

Déterminer tous les extrema locaux de

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-1/|x|} \left( \sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

## Théorèmes de Rolle, des accroissements finis et de la limite de la dérivée

### Autocorrection D.



Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Montrer qu'il existe  $x \in ]0, 1[$  tel que  $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ .

### Exercice 16<sup>+</sup>.

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On suppose que  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ .

- Montrer par un exemple que cela n'implique pas  $f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ .
- Montrer qu'il existe une suite  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $f'(\xi_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

### Exercice 17.



Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable admettant une même limite finie  $\ell \in \mathbb{R}$  en  $\pm\infty$ .

On veut montrer que  $f'$  possède (au moins) un zéro sur  $\mathbb{R}$ .

**Première méthode.** Posons

$$\varphi : \begin{cases} \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(\tan(x)) \end{cases}$$

- Montrer que  $\varphi$  est dérivable.
- Montrer que  $\varphi$  admet un prolongement continu  $\tilde{\varphi} : \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Montrer que  $\exists c \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] : \varphi'(c) = 0$ .
- En déduire que  $f'$  possède (au moins) un zéro sur  $\mathbb{R}$ .

**Deuxième méthode.** Montrer qu'il existe deux réels  $x_- < x_+$  tels que  $f(x_-) = f(x_+)$  et conclure.

### Exercice 18<sup>+</sup>.



Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable vérifiant  $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$  pour un certain  $a \neq 0$ .

Montrer qu'il existe un point  $(\neq (0, 0))$  sur le graphe de  $f$  en lequel la tangente passe par  $(0, 0)$ .

### Exercice 19<sup>+</sup>.

Soit  $P$  un polynôme. Montrer que l'équation  $P(x) = e^x$  n'admet qu'un nombre fini de solutions.

**Exercice 20<sup>++</sup>.**

Soit  $P$  un polynôme tel que l'équation  $P(x) = \cos(x)$  possède une infinité de solutions.

Montrer que  $P$  est constant.

**Exercice 21.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Montrer que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Exercice 22 (Une autre démonstration du théorème de Darboux).**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable dont la dérivée ne s'annule pas.

1. Montrer qu'elle est injective.
2. En déduire que  $f'$  ne change pas de signe.
3. Démontrer le théorème de Darboux.

**Exercice 23<sup>+</sup> (Théorème de Darboux, démonstration topologique).**

Soit  $f \in D^1(\mathbb{R})$  et  $I$  un intervalle. On définit  $J = \left\{ \frac{f(a) - f(b)}{b - a} \mid a < b \in I \right\}$  et  $K = \{f'(x) \mid x \in I\}$ .

1. Montrer  $J \subseteq K \subseteq \bar{J}$ .
2. En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Darboux.

**Exercice 24<sup>+</sup>.**

1. Soit  $f$  dérivable telle que  $xf'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ . Montrer que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .
2. Peut-on trouver  $f$  telle que  $xf'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  ?

**Exercice 25.**

Soit  $f \in D^1([a, b]; \mathbb{R})$  telle que  $f(a) = f(b)$  et  $f'(a) > 0$ .

Montrer que  $f'$  prend au moins une valeur strictement négative sur  $[a, b]$ .

**Exercice 26<sup>+</sup>.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) f'(x) \geq 0$ . Montrer que l'ensemble des points où  $f$  ne s'annule pas est un intervalle de la forme  $]T, +\infty[$ , avec  $T \in \bar{\mathbb{R}}$ .

**Exercice 27.**

1. Montrer  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$ .
2. En déduire les limites de  $\left( \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $\left( \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 28.**

Déterminer la limite éventuelle de  $x \mapsto (x+1)e^{1/(x+1)} - xe^{1/x}$  en  $+\infty$ .

**Exercice 29.**

1. (a) Dresser le tableau de variations de  $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ .
- (b) Montrer que  $[0, 1]$  est un intervalle stable sous  $f$  et en déduire que  $f$  admet un point fixe  $\ell \in [0, 1]$ .
- (c) Montrer que  $f$  est *contractante*, c'est-à-dire  $c$ -lipschitzienne pour un certain  $c < 1$ .
- (d) On définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant  $u_0 \in [0, 1]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$ .

Déduire de ce qui précède que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

2. Reprendre les questions pour la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_0 \in [0, 1]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{e^{v_n}}{v_n + 2}$ .

**Exercice 30.**

Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $\alpha$ -höldérienne s'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Montrer que si  $I$  est un intervalle et que  $\alpha > 1$ , les fonctions  $\alpha$ -höldériennes sont constantes.

**Exercice 31<sup>+</sup>.**

Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée croissante, et telle que  $f(0) = 0$ .

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{f(x)}{x} \leq f'(x)$ .

**Exercice 32<sup>+</sup>.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle que  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ . Montrer  $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ .

**Exercice 33.**

Étudier la dérивabilité en 0 de la fonction  $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ .

**Exercice 34.**

Déterminer l'ensemble des points où la fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \end{cases}$  est dérivable.

**Dérivées supérieures****Exercice 35.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$ .

1. Montrer  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$ .
2. Retrouver ce résultat à l'aide de l'exponentielle complexe.

**Exercice 36.**

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$ . Montrer que la fonction  $f$  est lisse et que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(4n-1)}(1) = 0$ .

**Exercice 37.**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $]0, 1[$  par

$$f_0 : x \mapsto \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = xf'_n(x).$$

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une fonction polynomiale  $P_n$  de degré  $n$  et à coefficients dans  $\mathbb{N}$  telle que  $\forall x \in ]0, 1[, f_n(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x)^{(n+1)}}$ .
- En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est strictement positive.

**Exercice 38<sup>+</sup>.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{-1/x}$  si  $x > 0$  et  $f(x) = 0$  sinon.

- Montrer que  $f$  est lisse sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une fonction polynomiale  $P_n$  telle que

$$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n(1/x).$$

- Montrer que  $f$  est lisse sur  $\mathbb{R}$ .

- Soit  $S$  un segment non trivial de  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$  non nulle telle que  $h|_{\mathbb{R} \setminus S} = 0$ .

**Exercice 39<sup>+</sup>.**

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-x^{-2}} \cos(e^{x^{-2}}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ . Quelle est la classe de régularité de  $f$ ?

**Exercice 40.**

Soit  $f_1, \dots, f_n \in C^p(\mathbb{R})$ . Montrer que  $f_1 \cdots f_n \in C^p(\mathbb{R})$  et que

$$(f_1 \cdots f_n)^{(p)} = \sum_{k_1 + \dots + k_n = p} \frac{p!}{k_1! \cdots k_n!} f_1^{(k_1)} \cdots f_n^{(k_n)}.$$

**Exercice 41.**

Soit  $f \in C^n(\mathbb{R}_+^*)$  et  $g : x \mapsto f(1/x)$ . Montrer que  $g \in C^n(\mathbb{R}_+^*)$  et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-p)}{x^{2n-p}} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Exercice 42.**

Prolonger par continuité si besoin chacune des fonctions suivantes, puis étudier la classe de la fonction obtenue.

$$(i) \quad f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x};$$

$$(iii) \quad f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} \sin x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$$

$$(ii) \quad f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$(iv) \quad f : x \mapsto \begin{cases} x + a + be^x & \text{si } x \geq 0 \\ \cos x - x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

**Exercice 43.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f(x) = e^x + x$ .

1. Montrer que  $f$  est bijective.
2. Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable et déterminer la valeur de  $(f^{-1})'(1)$ .
3. Montrer que  $f^{-1}$  est deux fois dérivable et donner la valeur de  $(f^{-1})''(1)$ .

**Exercice 44<sup>+</sup>.**

Soit  $f \in D^2(\mathbb{R})$  convergeant en  $\pm\infty$ .

Donner deux démonstrations (avec et sans le théorème de Darboux) du fait que  $f''$  s'annule.

**Exercice 45<sup>+</sup>.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f \in D^n(I)$ , s'annulant  $n+1$  fois sur  $I$ . Montrer que  $f^{(n)}$  s'annule.

**Exercice 46<sup>+</sup>.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f \in D^n(\mathbb{R})$  tels que  $f(0) = 0$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f^{(k)}(1) = 0$ . Montrer que  $f^{(n)}$  s'annule.

**Exercice 47<sup>+</sup>.**

Soit  $f \in C^2([0, 1])$  telle que  $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$ .

Montrer qu'il existe  $c \in [0, 1]$  tel que  $f''(c) = f(c)$ .

## Mélange

**Exercice 48.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction lisse et périodique. Montrer que  $f$  est lipschitzienne.

**Exercice 49<sup>+</sup>.**

Soit  $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$  telle que  $f'(0) = 0$ . Montrer qu'il existe  $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = g(x^2)$ .

**Exercice 50<sup>+</sup>.**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dérivable telle que  $f \circ f = f$ .

Montrer que  $f$  est soit constante, soit égale à l'identité.

**Exercice 51<sup>++</sup>.**

Soit  $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$  telle que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

1. Si  $f''$  est bornée, montrer  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .
2. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse sur  $f''$  ?

**Exercice 52<sup>+</sup>.**

Soit  $f \in C^1(\mathbb{R})$  positive. Montrer qu'il existe une suite réelle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $f'(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Exercice 53<sup>+</sup> (Nombre de Liouville).**

1. Soit  $P \in \mathbb{Z}[X]$  de degré  $n \geq 1$  et  $x$  une racine de  $P$ .

(a) Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tous  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ , on ait

$$\left( P\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0 \text{ et } \left|x - \frac{a}{b}\right| \leq 1 \right) \Rightarrow \left|x - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{C}{b^n}.$$

(b) En déduire qu'il existe une constante  $C' > 0$  telle que, pour tous  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ , on ait

$$\frac{a}{b} \neq x \Rightarrow \left|x - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{C'}{b^n}.$$

2. (a) Montrer que la suite  $\left( \sum_{k=0}^n 2^{-k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

(b) Montrer que sa limite est un nombre *transcendant*, c'est-à-dire qu'elle n'est racine d'aucun polynôme de  $\mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ .

**Remarque.** C'est historiquement le premier exemple de nombre transcendant (Liouville, 1844).

**Exercice 54<sup>++</sup>.**

*Ulm*

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n$ , et  $Q = P + P' + \cdots + P^{(n)}$ .

Montrer que si  $P$  est à valeurs positives (c'est-à-dire que  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ ), alors  $Q$  aussi.